ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановская государственная текстильная академия»
(ИГТА)

Кафедра теоретической механики
и сопротивления материалов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов немеханических специальностей
2 курса заочного факультета

Иваново 2009

Методические указания и контрольные задания предназначены студентам немеханических специальностей (технологи, швейники и др.) для выполнения контрольных работ. При подготовке данного издания использованы методические указания для студентов – заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений «Теоретическая механика» / Котова Л.И., Надеева Р.И., Тарг С.М. и др.; под ред. Тарга С.М. – 4-е изд.- М.: Высш. шк., 1989.

Составитель канд. техн. наук, проф. Н.Ф.Калабин

Научный редактор канд. техн. наук, проф. С.М.Иванов

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ

Студенты выполняют в весеннем семестре 2 контрольные работы, включающие следующие задачи:

№1- задачи 1(С1), 2(С2), 3(К1а, б);

№2 - задачи 4(К4), 5(Д1), 6(Д6).

В скобках указаны задачи по методическим указаниям «Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией проф. С. М. Тарга. М.: Высш. шк., 1989».

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. 1.4 - это рис. 4 к задаче 1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице - по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Чертеж к задаче выполняется с учетом условий решаемого варианта; он должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтённая работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба, в тексте задач специально не оговаривается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми. Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой "Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера - разъяснить ход решения и воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

Контрольная работа № 1
Статика

Задача 1(С1)

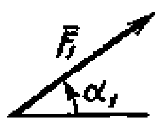
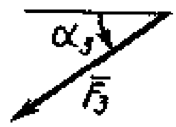
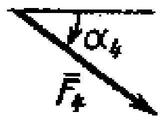
Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 1.0 – 1.9, табл. 1), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 25 кН. На раму действуют пара сил с моментом M = 100 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила $\overline{F}_2$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\overline{F}_3$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и т.д.).

Определить реакции связей в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

Указания. Задача 1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0(\overline{F}) = m_0(\overline{F}') + m_0(\overline{F}'')$.

Таблица 1

Силы								
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	H	30	—	—	—	—	K	60
1	—	—	D	15	E	60	—	—
2	K	75	—	—	—	—	E	30
3	—	—	K	60	H	30	—	—
4	D	30	—	—	—	—	E	60
5	—	—	H	30	—	—	D	75
6	E	60	—	—	K	15	—	—
7	—	—	D	60	—	—	H	15
8	H	60	—	—	D	30	—	—
9	—	—	E	75	K	30	—	—

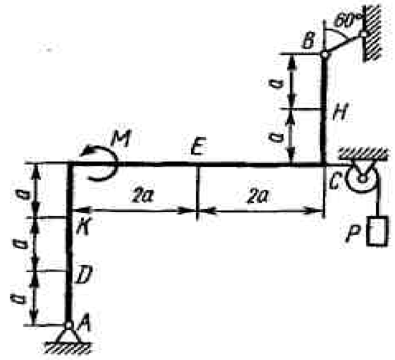


Рис. 1.0

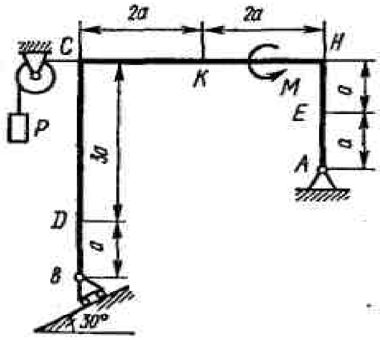


Рис. 1.1

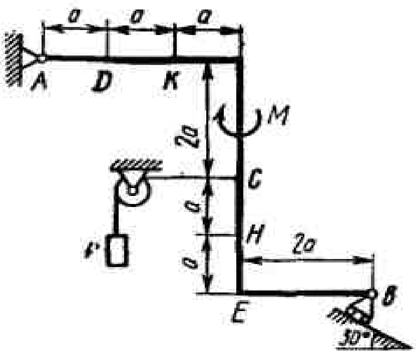


Рис. 1.2

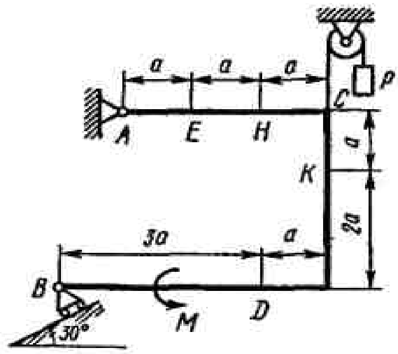


Рис. 1.3

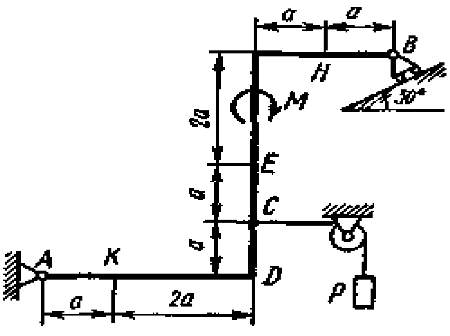


Рис. 1.4

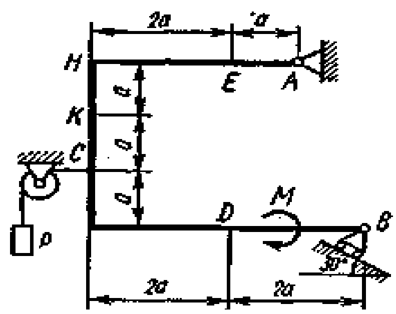


Рис. 1.5

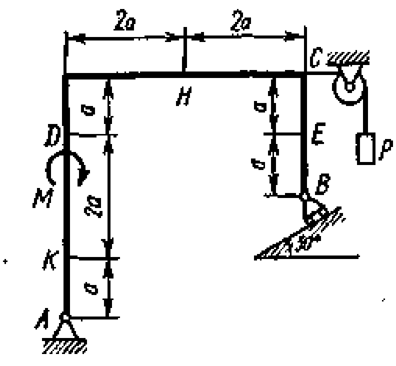


Рис. 1.6

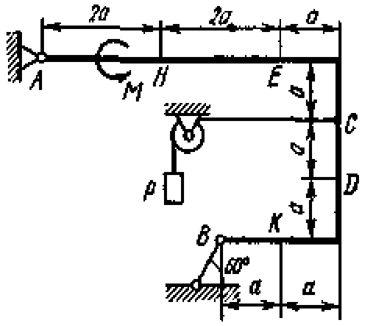


Рис. 1.7

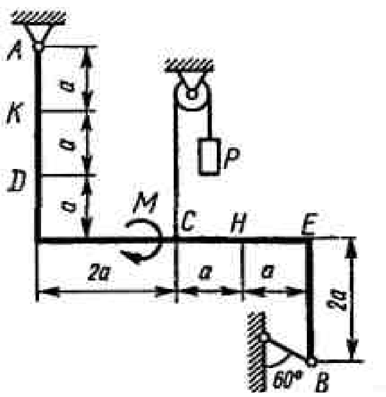


Рис. 1.8

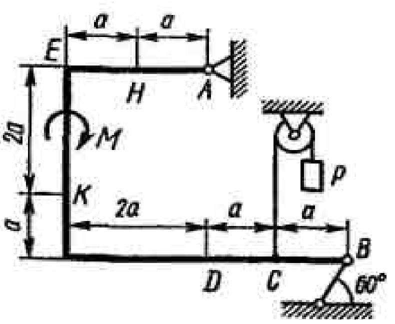


Рис. 1.9

Пример 1. Жесткая пластина *ABCD* (рис. 1) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* ‒ подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: F = 25 кН, α = 60°, P = 18 кН, γ = 75°, M = 50 кН·м, β = 30°, a = 0,5 м.

О п р е д е л и т ь : реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины.

Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом *M*, натяжение троса $\overline{\mathrm{T}}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

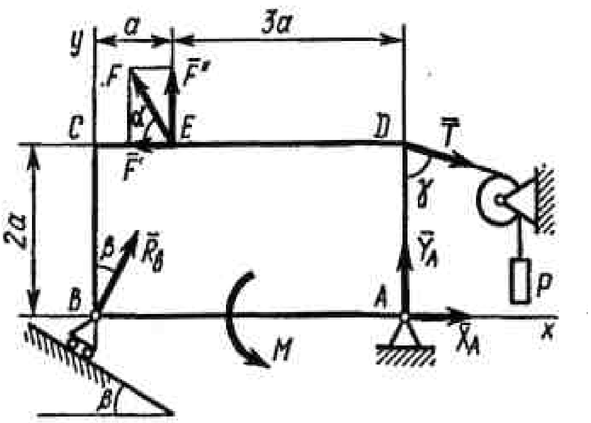


Рис. 1

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0\ ,\ \mathrm{X_A} + \mathrm{R_B}\sin\beta - \mathrm{F}\cos\alpha + \mathrm{T}\sin\gamma = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{kx} = 0\ ,\ \mathrm{Y_A} + \mathrm{R_B}\cos\beta + \mathrm{F}\sin\alpha - \mathrm{T}\cos\gamma = 0; \qquad (2)$$

$$\sum \mathrm{m_A}(\overline{F}_\mathrm{K}) = 0;$$

$$\mathrm{M} - \mathrm{R_B}\cos\beta \cdot 4a + \mathrm{F}\cos\alpha \cdot 2a - \mathrm{F}\sin\alpha \cdot 3a - \mathrm{T}\sin\gamma \cdot 2a = 0. \qquad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

О т в е т : X_A = -8,5 кН; Y_A = -23,3 кН; R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы $\overline{\mathrm{X}}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. 1.

Задача 2(С2)

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно (рис. 2.0 – 2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. 2.6 – 2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B - или гладкая плоскость (рис. 0 и 1), или невесомый стержень BB' (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4 – 9); в точке D - или невесомый стержень DD' (рис. 0, 3, 8), или шарнирная опора на катках (рис. 7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом M = 60 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 20 кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. 2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила $\overline{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E , и нагрузка, распределенная на участке СК).

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. 0, 3, 7, 8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,2 м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. 2а.

Указания. Задача 2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

Таблица 2

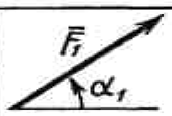
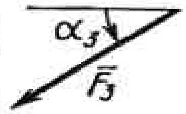
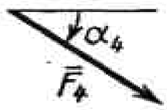
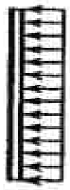
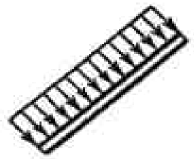
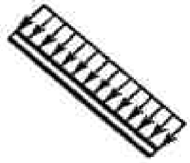
Сила									Нагруженный участок
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН		
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град	
0	K	60	—	—	H	30	—	—	CL
1	—	—	L	60	—	—	E	30	CK
2	L	15	—	—	K	60	—	—	AE
3	—	—	K	30	—	—	H	60	CL
4	L	30	—	—	E	60	—	—	CK
5	—	—	L	75	—	—	K	30	AE
6	E	60	—	—	K	75	—	—	CL
7	—	—	H	60	L	30	—	—	CK
8	—	—	K	30	—	—	E	15	CL
9	H	30	—	—	—	—	L	60	CK

Таблица 2а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	верти-кальный	рис. 0, 3, 5, 7, 8	рис. 1, 2, 4, 6, 9
			

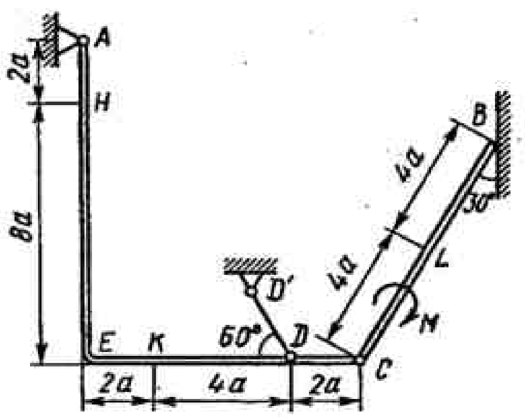


Рис. 2.0

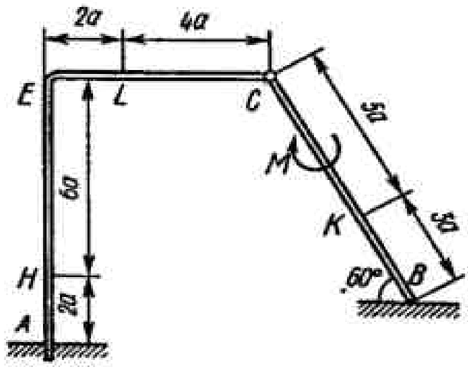


Рис. 2.1

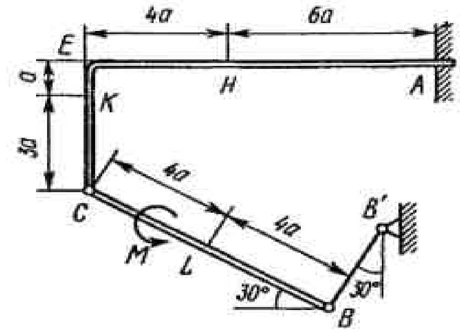


Рис. 2.2

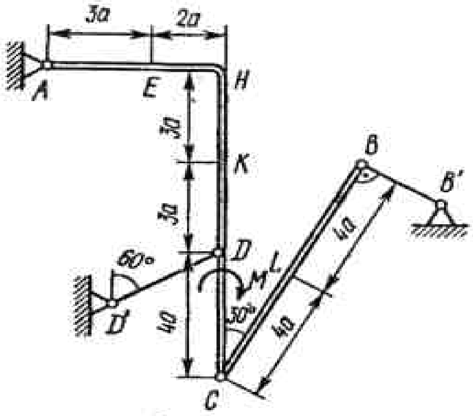


Рис. 2.3

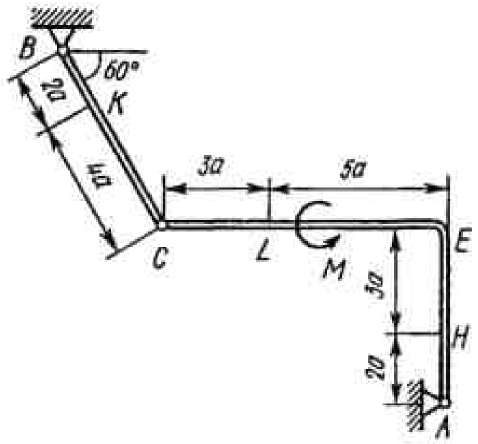


Рис. 2.4

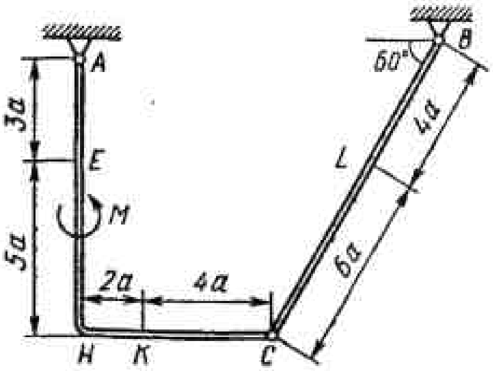


Рис. 2.5

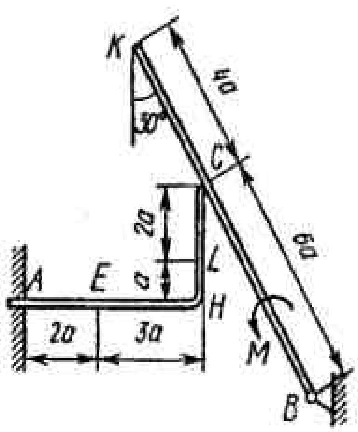


Рис. 2.6

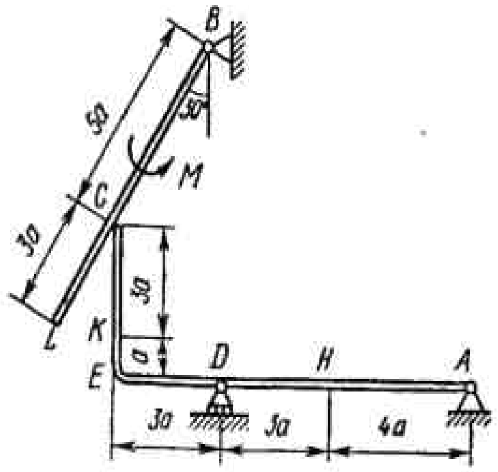


Рис. 2.7

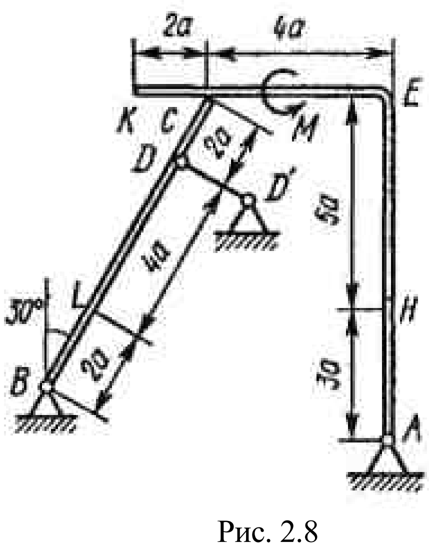


Рис. 2.8

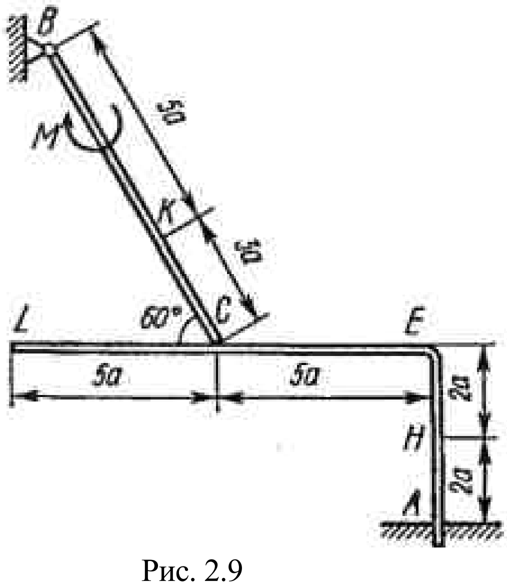


Рис. 2.9

Пример 2. На угольник *ABC* ($\angle$ *ABC* = 90°), конец *A* которого жестко заделан, в точке *C* опирается стержень *DE* (рис. 2,а). Стержень имеет в точке *D* неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\overline{F}$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке *KB* нагрузка интенсивности q и пара с моментом *M*.

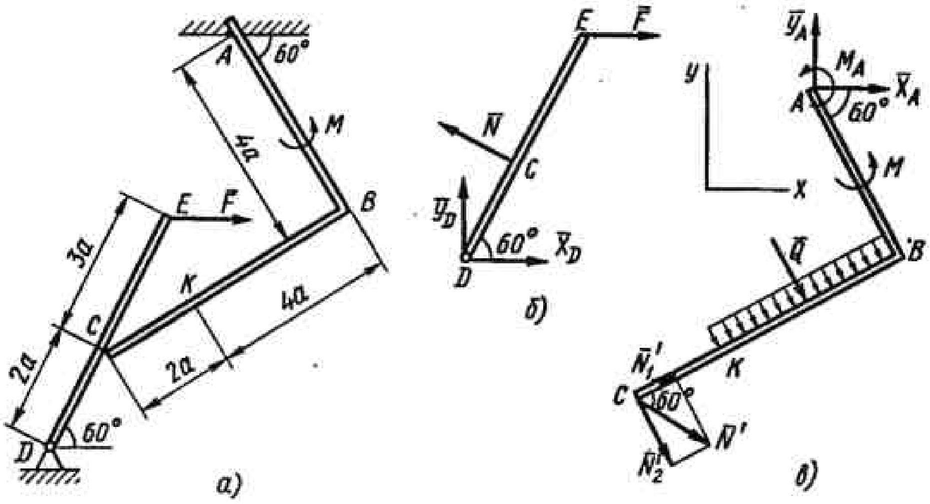


Рис. 2

Дано: F=10 кН, M = 5 кН·м, q = 20 кН/м, a = 0,2 м.

Определить: реакции в точках *A, C, D,* вызванные заданными нагрузками.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня *DE* (рис. 2,б). Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира *D.* Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0\ ,\ X_D + F - N\ \sin 60° \ = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0\ ,\ Y_D + N\ \cos 60° \ = 0; \tag{2}$$

$$\sum m_D(\overline{F}_K) = 0,\ N{\cdot}2a - F{\cdot}5a\ \sin 60° \ = 0. \tag{3}$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 2, в). На него действуют сила давления стержня $\overline{N}'$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка *KB* (численно Q = q·4a =16 кН), пара сил с моментом *M* и реакция жесткой заделки, состоящая из силы, которую представим составляющими $\overline{X}_A$,$\overline{Y}_A$, и пары с моментом M_A.

Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0\ ,\ X_A + Q\ \cos 60° + N'\ \sin 60° \ = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{ky} = 0\ ,\ Y_A - Q\ \sin 60° - N'\ \cos 60° \ = 0; \tag{5}$$

$$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0,\ M_A + M + Q{\cdot}2a + N'\ \cos 60°{\cdot}4a + N'\ \sin 60°{\cdot}6a = 0. \tag{6}$$

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ разложим ее на составляющие $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ и применим теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1) – (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N'=N$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: N=*21,7* кН, Y_D = -10,8 кН, X_D = 8,8 кН, X_A = -26,8 кН, Y_A = 24,7 кН, M_A = -42,6 кН·м.

Знаки указывают, что силы $\overline{Y}_D$, $\overline{X}_A$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

КИНЕМАТИКА

Задача 3 (К1)

Под номером 3 помещены две задачи - 3а и 3б, которые надо решить.

Задача 3а. Точка *B* движется в плоскости *xy* (рис. 3.0 – 3.9, табл.3, траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1 = 1с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. 3 (для рис. 0 – 2 в столбце 2, для рис. 3 – 6 в столбце 3, для рис. 7 – 9 в столбце 4). Как и в задачах 1 – 2, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. 3 – по последней.

Задача 3б. Точка движется по дуге окружности радиуса *R* = 2 м по закону *s = f(t),* заданному в табл. 3 в столбце 5 *(s* – в метрах, *t* – в секундах), где s = *AM* – расстояние точки от некоторого начала А, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с. Изобразить на рисунке векторы $\overline{v}$ и $\overline{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении М, а положительное направление отсчета s – от А к М.

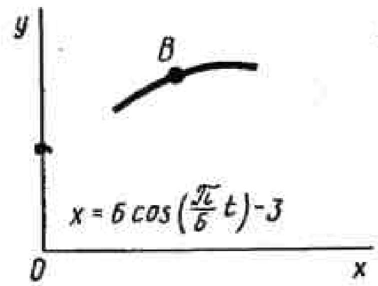


Рис. 3.0

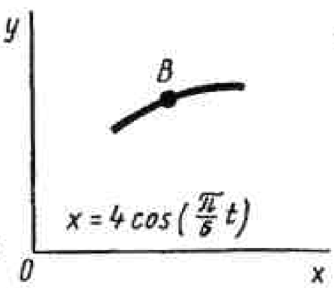


Рис. 3.1

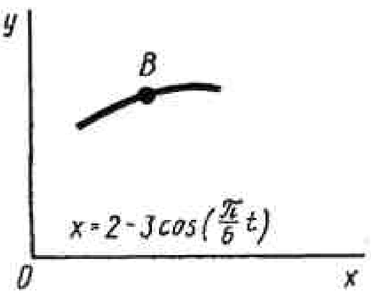


Рис. 3.2

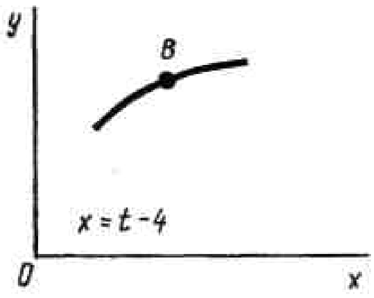


Рис. 3.3

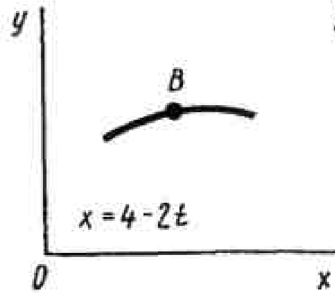


Рис. 3.4

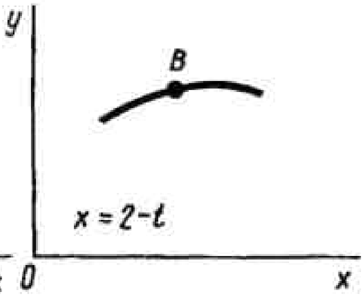


Рис. 3.5

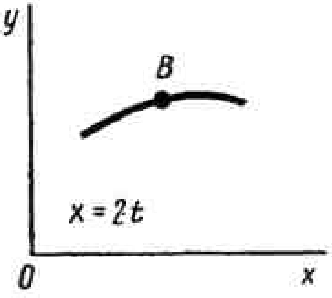


Рис. 3.6

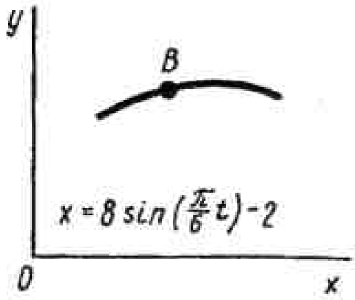


Рис.3.7

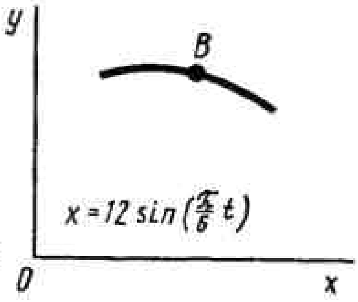


Рис. 3.8

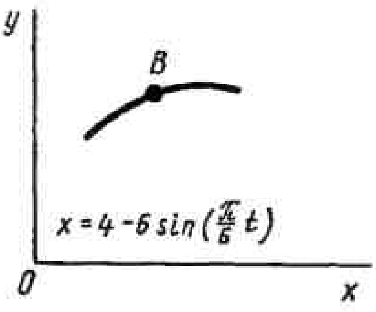


Рис. 3.9

Указания. Задача 3 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи 3а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Таблица 3

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Пример 3 а. Даны уравнения движения точки в плоскости *xy:*

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3,\ y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \tag{1}$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \ \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\,\frac{(y+1)^2}{2}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. 3 а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \tag{2}$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

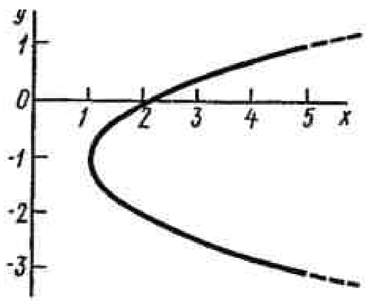


Рис. 3а

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

и при $t_1 = 1$с

$\upsilon_{1x} =$ 1,11 см/с, $\upsilon_{1y} =$ 0,73 см/с,
$\upsilon_1 =$ 1,33 см/с. (3)

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right),\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t_1 = 1$с

$a_{1x} = 0{,}87$ см/с^2, $a_{1y} = -0{,}12$ см/с^2, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2. (4)

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$. Получим

$$2\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t} = 2\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t} + 2\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial t},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}. \tag{5}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n=\sqrt{a^2 + a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \upsilon^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения υ_1 и α_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Ответ: $\upsilon_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 == 3{,}05$ см.

Пример 3 б. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s = 2\sin(\frac{\pi}{4}t)$ *(s*— в метрах, t — в секундах), где $s = \breve{AM}$ (рис. 3, б). Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t = 1$ с.

Решение. Определяем скорость точки:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t).$$

При $t_1 = 1$с получим $\upsilon_1 = \pi\sqrt{2}/4 = 1{,}11$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin(\frac{\pi}{4}t),$$

$$a_n = \frac{\upsilon 2}{\rho} = \frac{\upsilon 2}{R}\ .$$

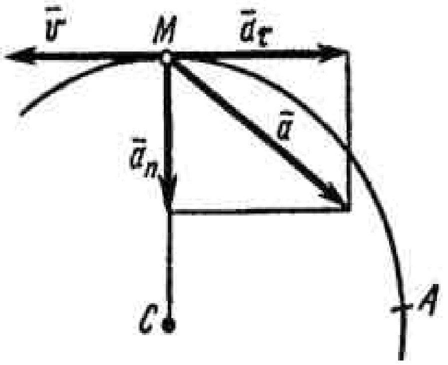


Рис 3,б

При $t_1 = 1$с получим, учтя, что $R = 2$ м, $a_{1\tau} = -\pi^2\sqrt{2}/16 =$ $= 0{,}87$ м/с^2, $a_{1n} = \upsilon_1^2/2 = \pi^2/16 = 0{,}62$ м/с^2.

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1$с будет

$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1{,}07$ м/с^2.

Изобразим на рис. 3,б векторы $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{a}_1$, учитывая знаки υ_1 и $a_{1\tau}$ и считая положительным направление от A к M.

Контрольная работа №2

Задача 4 (К4)

Прямоугольная пластина (рис. 4.0 — 4.4) или круглая пластина радиуса $R = 60$ см (рис. 4.5 – 4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. 4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 4.0, 4.1, 4.2, 4.5, 4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис.4.0 – 4.4) или по окружности радиуса R (рис.4.5 – 4.9) движется точка M; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ *(s* выражено в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 4.0 – 4.4 и для рис. 4.5 – 4.9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM>0$ (при $s<0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. Задача 4 – на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени t_1=1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 4.5 – 4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1 = 1 с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

Таблица 4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 4.0 – 4.4		Для рис. 4.5 – 4.9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	t	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2-2t^3)$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2-t^3)$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2-1)$
3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t-t^2)$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3-2t)$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3-2t)$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3-2t^2)$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t-5t^2)$
8	$2t^3-11t$	10	$50(t^3-t)-30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2-t)$
9	$6t^2 — 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t-2t^2)$

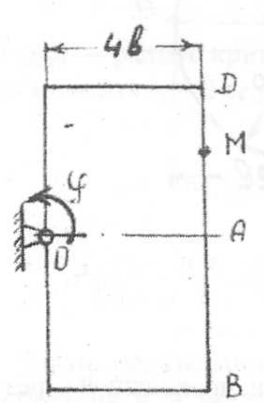


Рис. 4.0

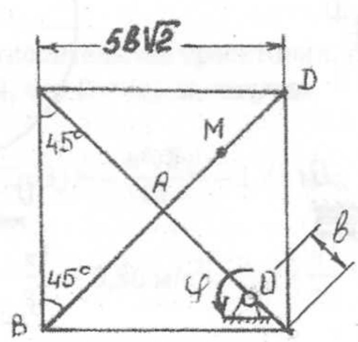


Рис. 4.1

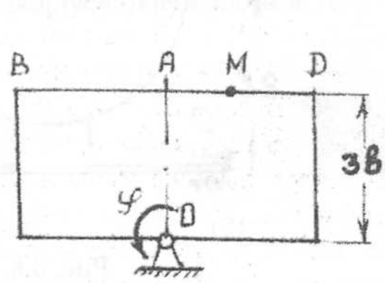


Рис. 4.2

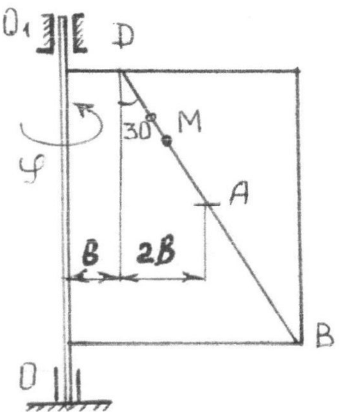


Рис. 4.3

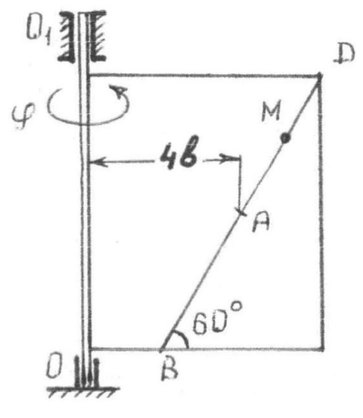


Рис. 4.4

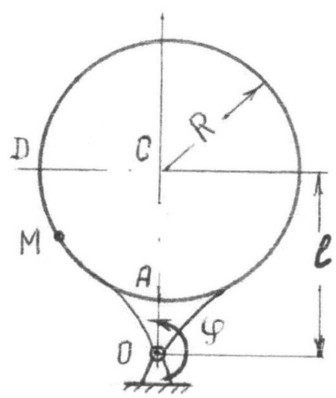


Рис. 4.5

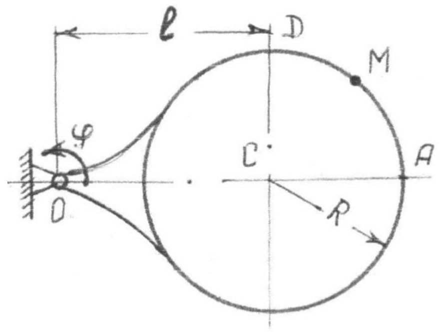


Рис. 4.6

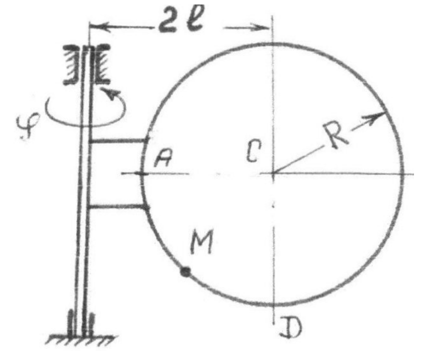


Рис. 4.7

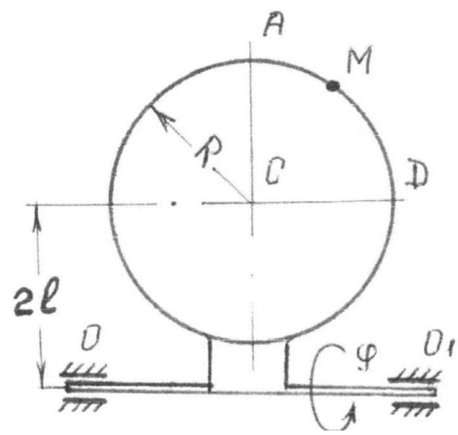


Рис. 4.8

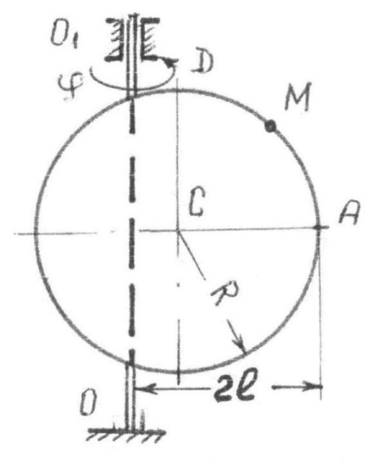


Рис. 4.9

Пример 4а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE=OD$, рис. 4,а) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 4,а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = AB = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s — от A к B).

Дано: R=0,5 м, $\varphi=t^2 - 0{,}5t^3$, $s=\pi R\cos(\pi t/3)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).Определить: $\upsilon_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ с в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\overline{\upsilon}_{\text{абс}}$ и абсолютное ускорение $\overline{a}_{\text{абс}}$ точки найдутся по формулам:

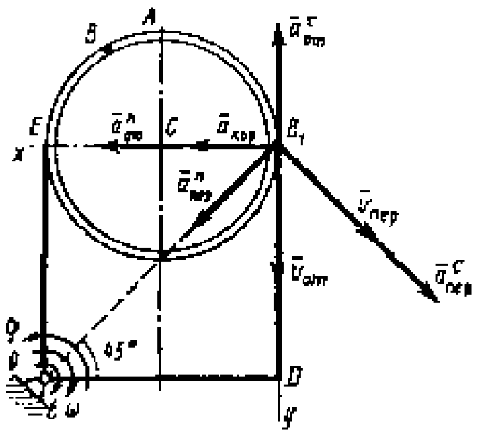


Рис. 4,а

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер},$$
$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн},\ \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

Определим все входящие в равенства (1) величины. 1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \breve{AB} = \pi R \cos(\pi t/3). \qquad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) $t_1 = 2$ с, получим

$$s_1 = \pi R \cos(\pi 2/3) = -\,0{,}5\pi R.$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -\,0{,}5\pi.$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент $t_1 = 2$ с находится справа от точки A. Изображаем ее на рис. 4,а в этом положении (точка B_1).

Теперь находим числовые значения $\upsilon_{отн}, a^{\tau}_{отн}, a^{n}_{отн}$:

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(\pi t/3),$$

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(\pi t/3),\quad a^{n}_{отн} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{\rho_{отн}} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{R},$$

где $\rho_{отн}$ — радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента $t_1 = 2$ с, учитывая, что R = 0,5 м, получим:

$$\upsilon_{отн} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} = -\,1{,}42 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86 \text{ м/с}^2,\quad a^{n}_{отн} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}06 \text{ м/с}^2. \qquad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}^{\tau}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{v}_{отн}$ — в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{отн}$ направлен к центру C окружности. Изображаем все эти векторы на рис. 4,а.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1{,}5t^2,\ \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при $t_1 = 2$ с

$$\omega = -\,2 \text{ с}^{-1},\quad \varepsilon = -\,4 \text{ с}^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что в момент t_1 = 2 с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ; отметим это на рис. 4,а.
Для определения $\overline{\upsilon}_{пер}$ и $\overline{a}_{пер}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O. Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2}$= 1,41 м. Тогда в момент времени t_1 = 2 с, учитывая равенства (4), получим:

$$\upsilon_{пер}=|\omega| \cdot h_1 = 2{,}82 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}{}_{пер} = =|\varepsilon| \cdot h_1 = 5{,}64 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}{}_{пер} = \ \omega^2 \cdot h_1 = 5{,}64 \text{ м/с}^2. \tag{5}$$

Изображаем на рис. 4,а векторы $\overline{\upsilon}_{пер}$ и $\overline{a}^{\tau}{}_{пер}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\overline{a}^{n}{}_{пер}$ (направлен к оси вращения).
3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{кор} = 2|\upsilon_{отн}|\cdot|\omega|\cdot\sin\alpha$, где α — угол между вектором $\overline{\upsilon}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90°, так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\overline{\upsilon}_{отн}$. Численно в момент времени t_1 = 2 с, так как в этот момент | $\upsilon_{отн}$ | = 1,42 м/с и ω| = 2 с$^{-1}$, получим

$$a_{кор} = 5{,}68 \text{ м/с}^2. \tag{6}$$

Направление $\overline{a}_{кор}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор $\overline{\upsilon}_{отн}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90^o в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\overline{a}_{кор}$ на рис. 4,а. [Иначе направление $\overline{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{\upsilon}_{отн})$.]

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены, и для определения $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.
4. Определение $\upsilon_{абс}$. Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. 4,а) и спроецируем почленно обе части равенства $\overline{\upsilon}_{абс} = \overline{\upsilon}_{отн} + \overline{\upsilon}_{пер}$ на эти оси. Получим для момента времени t_1 = 2 с:

$$\upsilon_{абсx} = \upsilon_{отнx} + \upsilon_{перx} = 0 - |\upsilon_{пер}| \cos 45^\circ = -1{,}99 \text{ м/с};$$
$$\upsilon_{абсy} = \upsilon_{отнy} + \upsilon_{перy} = |\upsilon_{отн}| + |\upsilon_{пер}| \cos 45^\circ = 3{,}41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{абсx} + \upsilon^2_{абсy}} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\overline{\upsilon}_{отн}$ и $\overline{\upsilon}_{пер}$ равен 45°, значение $\upsilon_{абс}$ можно еще определить по формуле

$$\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{отн} + \upsilon^2_{пер} + 2|\upsilon_{отн}| \cdot |\upsilon_{пер}| \cdot \cos 45^\circ} = 3{,}95 \text{ м/с}.$$

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}^{\tau}{}_{отн} + \overline{a}^{n}{}_{отн} + \overline{a}^{\tau}{}_{пер} + \overline{a}^{n}{}_{пер} + \overline{a}_{кор}. \tag{7}$$

Для определения $a_{абс}$ спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy. Получим:

$$a_{абсx} = a^{n}{}_{отн} + a_{кор} + a^{n}{}_{пер}\cos 45^\circ - |a^{\tau}{}_{пер}| \cos 45^\circ,$$
$$a_{абсy} = \ a^{n}{}_{пер}\cos 45^\circ + |a^{\tau}{}_{пер}| \cos 45^\circ - |a^{\tau}{}_{отн}|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени t_1 = 2 с, найдем, что в этот момент

$a_{абсx} = 9{,}74$ м/с^2; $a_{абсy} = 7{,}15$ м/с^2.

Тогда

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсx} + a^2_{абсy}} = 12{,}08 \text{ м/с}^2.$$

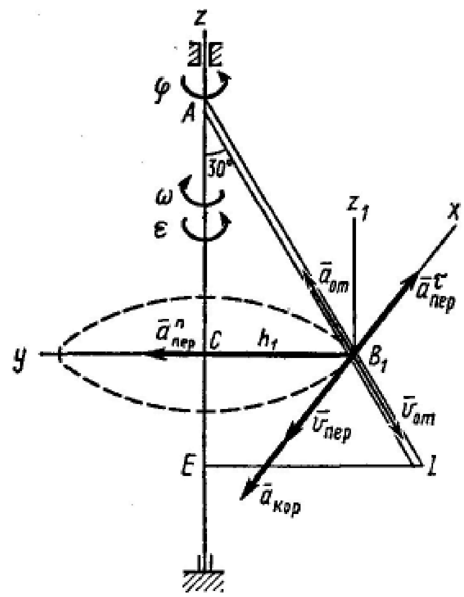


Рис. 4,б

Ответ: $\upsilon_{абс} = 3{,}95$ м/с, $a_{абс}=12{,}08$ м/с^2.

Пример 4б. Треугольная пластина ADE вращается вокруг оси z по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 4,б дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчета s — от A к D.

Дано: $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$, $s = AB = 2 + 15t - 3t^2$;
(φ – в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах).
Определить: $\upsilon_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по прямой AD относительным, а вращение пластины — переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{\upsilon}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{\upsilon}_{абс} = \bar{\upsilon}_{отн} + \bar{\upsilon}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}$.

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2. \tag{2}$$

Поэтому

$$\upsilon_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t, \quad a_{отн} = \dot{\upsilon}_{отн} = -6.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, \upsilon_{отн} = 3 \text{ см/с}, a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{\upsilon}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{a}_{отн}$ — в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. 4,б.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = 0{,}3t^2 - 2{,}2$; $\varepsilon = \dot{\omega} = 0{,}6t$ и при $t_1 = 2$ с

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 1{,}2 \text{ с}^{-2}. \tag{4}$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. 4,*б* соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z: $h_1 = AB_1 \sin 30° = 10$ см.

Тогда в момент $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим:

$$\upsilon_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = 10 \text{ см/с}^2. \tag{5}$$

Изобразим на рис. 4,б векторы $\overline{\upsilon}_{пер}$ и $\overline{a}^{\tau}_{пер}$ (с учетом знаков ω и ε) и $\overline{a}^{n}_{пер}$; направлены векторы $\overline{\upsilon}_{пер}$ и $\overline{a}^{\tau}_{пер}$ перпендикулярно плоскости *ADE,* а вектор $\overline{a}^{n}_{пер}$ — по линии B_1C к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\overline{\upsilon}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$) равен 30°, то численно в момент времени $t_1 = 2$ с

$$a_{кор} = 2 \cdot |\upsilon_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ см/с}^2. \tag{6}$$

Направление $\overline{a}_{кор}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор $\overline{\upsilon}_{отн}$ спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\overline{a}^{n}_{пер}$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\overline{a}_{кор}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\overline{\upsilon}_{пер}$ (см. рис. 4,б).

4. Определение $\upsilon_{абс}$. Так как $\overline{a}_{абс} = \overline{\upsilon}_{отн} + \overline{\upsilon}_{пер}$, а векторы $\overline{\upsilon}_{отн}$ и $\overline{\upsilon}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то $\upsilon_{абс} = \sqrt{\upsilon^2_{отн} + \upsilon^2_{пер}}$; в момент времени $t_1 = 2$ с $\upsilon_{абс} = 10{,}44$ см/с.

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{отн} + \overline{a}^{\tau}_{пер} + \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}_{кор}. \tag{7}$$

Для определения $a_{абс}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\overline{a}_{абс}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}^{\tau}_{пер}$ и $\overline{a}_{кор}$ лежат на оси *x,* а векторы $\overline{a}^{n}_{пер}$ и $\overline{a}_{отн}$ расположены в плоскости B_1xyz_1, т. е. в плоскости пластины. Тогда, проецируя обе части равенства (7) на оси B_1xyz_1 и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$a_{абсx} = |a^{\tau}_{пер}| - a_{кор} = 9 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{абсy} = a^{n}_{пер} + |a^{\tau}_{пер}| \sin 30^\circ = 13 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{абсz1} = |a_{отн}| \cos 30^\circ = 5{,}20 \text{ см/с}^2,$$

Отсюда находим значение $a_{абс}$:

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсx} + a^2_{абсy} + a^2_{абсz1}} = 16{,}64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{абс} = 10{,}44$ см/с, $a_{абс} = 16{,}64$ см/с^2.

ДИНАМИКА

Задача 5(Д1)

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость υ_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. 5.0 – 5.9, табл. 9). На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости $\overline{\upsilon}$ груза (направлена против движения) ; трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения(коэффициент трения груза о трубу $f = 0{,}2$) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x, на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_l движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Указания. Задача 5 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке ВС тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dx}.$$

Таблица 5

Номер условия	m, кг	υ_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4\upsilon$	—	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8\upsilon^2$	1,5	—	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5\upsilon$	—	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6\upsilon^2$	5	—	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4\upsilon$	—	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5\upsilon^2$	4	—	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3\upsilon$	—	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8\upsilon^2$	2,5	—	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5\upsilon$	—	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2\upsilon^2$	4	—	$-6\sin(4t)$

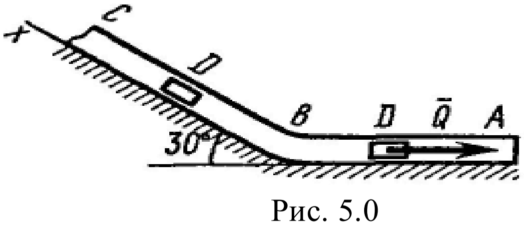


Рис. 5.0

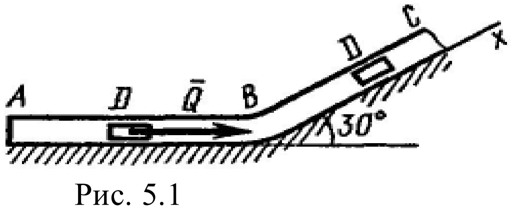


Рис. 5.1

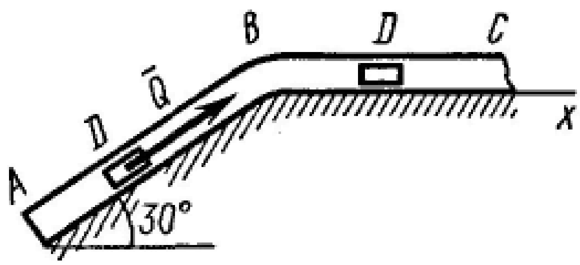


Рис. 5.2

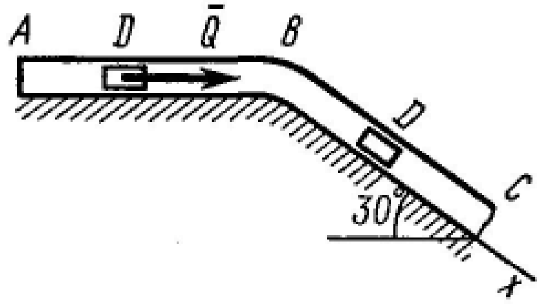


Рис. 5.3

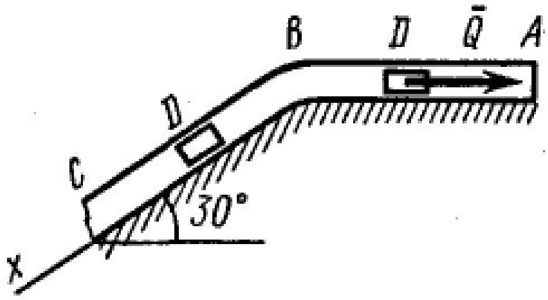


Рис. 5.4

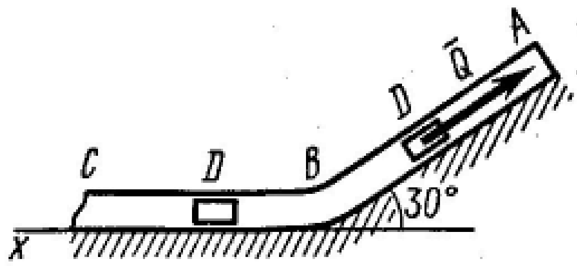


Рис. 5.5

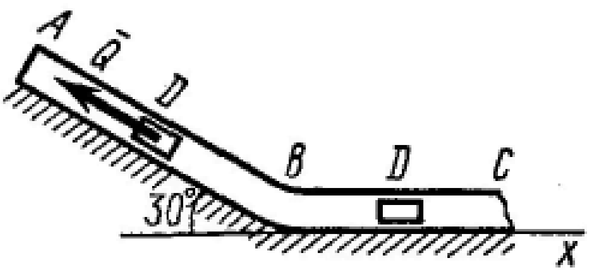


Рис. 5.6

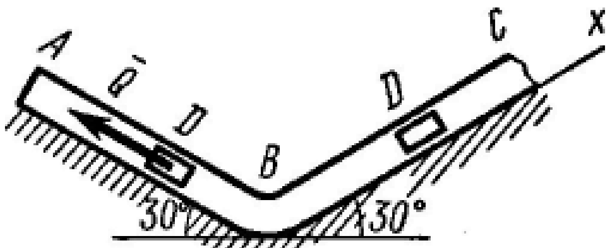


Рис. 5.7

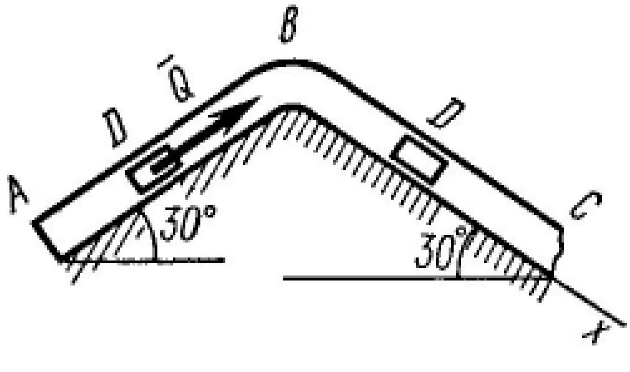


Рис. 5.8

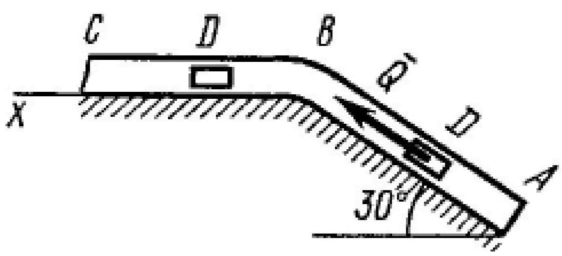


Рис. 5.9

Пример 5. На вертикальном участке AB трубы (рис. 5) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления R; расстояние от точки A, где $\upsilon = \upsilon_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 2$ кг, $R = \mu\upsilon^2$,где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $\upsilon_0 = 5$ м/с, $l = 2{,}5$ м, $F_x = 16\sin(4t)$. Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось A_z и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

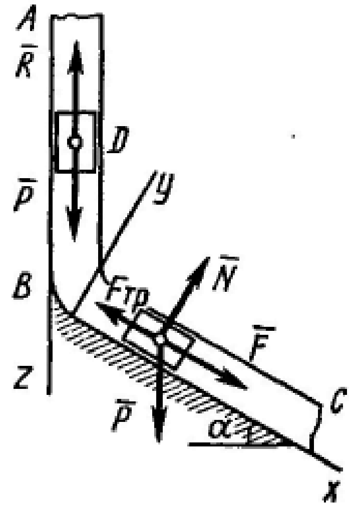


Рис. 5

$$m\frac{d\upsilon_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } m\upsilon_z \frac{d\upsilon_z}{dz} = P_z + R_z. \tag{1}$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\upsilon^2$; подчеркиваем, что в уравнении **все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят**. Учитывая еще, что $\upsilon_z = \upsilon$, получим:

$$m\frac{d\upsilon}{dz} = mg - \mu\upsilon^2 \text{ или } \upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{m\dot{g}}{\mu} - \upsilon^2\right). \tag{2}$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1},\ n = \frac{m\dot{g}}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \tag{3}$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2\upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dz} = -2k(\upsilon^2 - n). \tag{4}$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим:

$$\frac{2\upsilon d\upsilon}{\upsilon^2 - n} = -2k\text{d}z \text{ и } \ln(\upsilon^2 - n) = -2kz + C_l. \tag{5}$$

По начальным условиям при $z = 0$ $\upsilon = \upsilon_0$, что дает $C_l = \ln(\upsilon_0^2 - n)$, и из равенства (5) находим $\ln(\upsilon^2 - n) = -2kz + \ln(\upsilon_0^2 - n)$ или $\ln(\upsilon^2 - n) - \ln(\upsilon_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{\upsilon^2 - n}{\upsilon_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{\upsilon^2 - n}{\upsilon_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$\upsilon^2 = n + (\upsilon_0^2 - n)\,e^{-2kz}. \tag{6}$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость υ_B груза в точке B ($\upsilon_0 = 5$ м/с, число $e = 2{,}7$):

$$\upsilon_0^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \quad \text{и} \quad \upsilon_B = 6{,}4\ \text{м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке *BC;* найденная скорость υ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($\upsilon_0 = \upsilon_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{тр}$ и $\overline{F}$. Проведем из точки *B* оси *Bx* и *By* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Bx:*

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x$$

или

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр} + F_x\ , \qquad (8)$$

где $F_{тр} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось *By.* Так как $a_y = 0$, получим $0 = N — mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$, и уравнение (8) примет вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\,\sin(4t). \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на *m,* вычислим
$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30° - 0{,}2\cos 30°) = 3{,}2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим:

$$\frac{dv_x}{dt} = 3{,}2 + 8\,\sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на *dt* и интегрируя, найдем

$$\upsilon_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *B,* считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0 = \upsilon_B$, где υ_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим:

$$C_2 = \upsilon_B + 2\,\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на *dt* и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\,\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет;

$$x = 1{,}6t^{\,2} + 8{,}4t\ 0{,}5\,\sin(4t), \qquad (14)$$

где *x* — в метрах, *t* — в секундах.

Задача 6 (Д6)

Механическая система состоит из грузов *1* и *2,* ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 = 0,3 м, r_3=0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 = 0,2 м, блока *4* радиуса R_4 = 0,2 м и катка (или подвижного блока) *5* (рис. 6.0 – 6.9, табл. 10); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4* – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив *3* (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c.*

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент *M* сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 = 0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» табл.6, где обозначено: υ_1, υ_2, υ_{C5} – скорости грузов *1, 2* и центра масс тела *5* соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел *3* и *4.*

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток *5* на рис. 2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз *2,* если m_2 = 0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица 6

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F=f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4+5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8+3s)$	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6+5s)$	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5+6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9+4s)$	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7+8s)$	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8+9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8+5s)$	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9+2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6+7s)$	v_{C5}

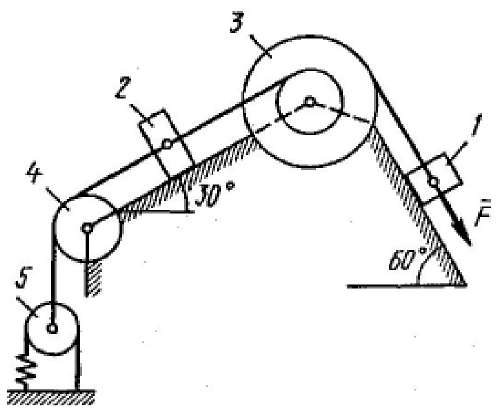


Рис. 6.0

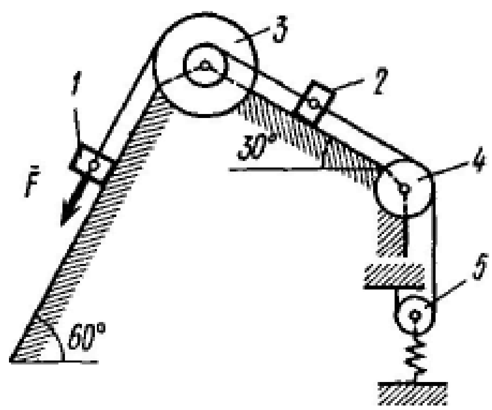


Рис. 6.1

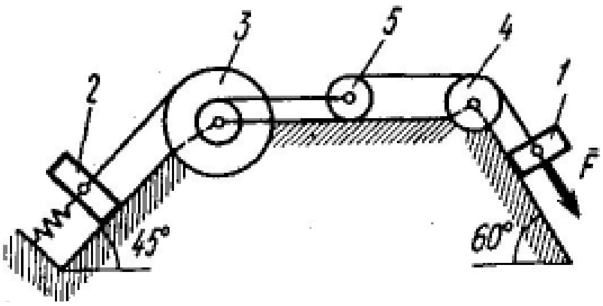


Рис. 6.2

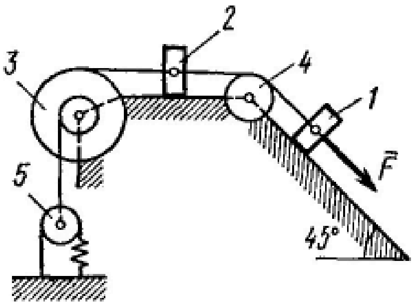


Рис. 6.3

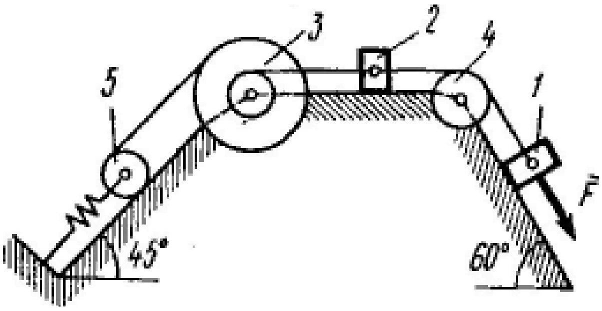


Рис. 6.4

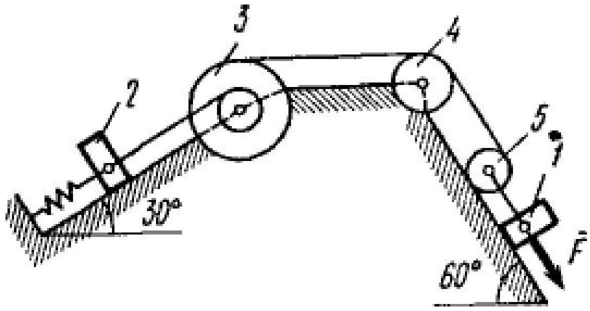


Рис. 6.5

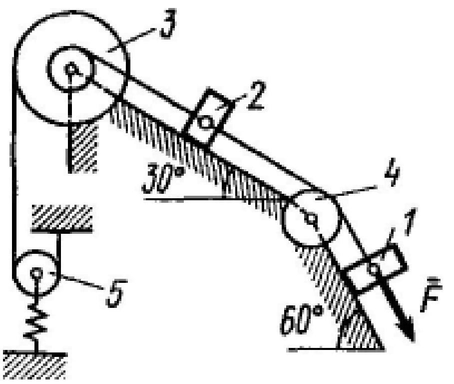


Рис. 6.6

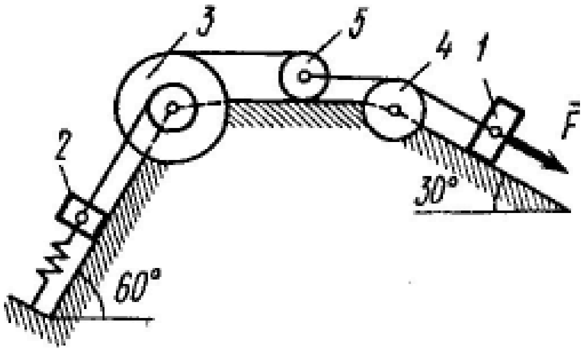


Рис. 6.7

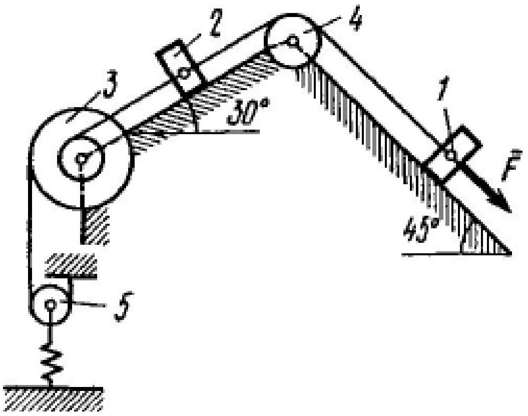


Рис. 6.8

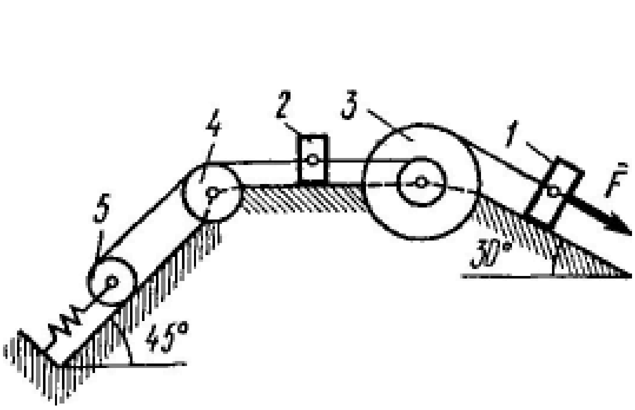


Рис. 6.9

Указания. Задача 6 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учитывая, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример 6. Механическая система (рис. 6,а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка *1*, подвижного блока *2,* ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока *4* и груза *5* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3.*

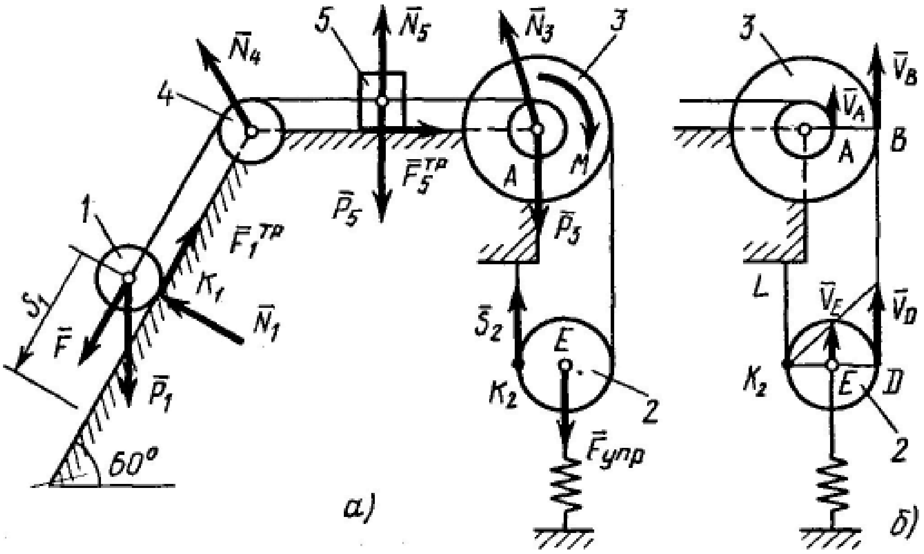


Рис. 6

К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $c = 240$ Н/м, $M = 0{,}6$ Н·м, $F = 20(3 + 2s)$ Н, $s_1 = 0{,}2$ м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *1, 3, 5* и невесомых тел *2, 4,* соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}^{тр}_1$, $\overline{F}^{тр}_5$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *5* - поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m_1 \upsilon_{C1}^2 \; + \frac{1}{2}\, I_{C1}\omega_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\, I_3\omega_3^2; \quad T_5 = \frac{1}{2}\, m_5 \upsilon_5^2. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \upsilon_A$, где *A* - любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка K_1 - мгновенный центр скоростей катка *1*, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$\upsilon_{C1} = \upsilon_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{\upsilon_{C1}}{K_1C_1} = \frac{\upsilon_{C1}}{r_1} = \omega_3\frac{r_3}{r_1} \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения:

$$I_{C1} = 0{,}5\, m_1 r_1^2; \quad I_3 = m_3\rho_3^2. \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно:

$$T = \left(\frac{3}{4}\, m_1 r_3^2 \; + \frac{1}{2}\, m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}\, m_5 r_3^2\right) \omega_3^2. \qquad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка *1* пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 - перемещение груза *5* ($s_5 = s_1$), φ_3 - угол поворота шкива *3*, λ_o и λ_1 - начальное и конечное удлинения пружины, получим:

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s1} 20(3+2s)ds \; = 20(3s_1 \; + s_1^2);$$
$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ;$$
$$A(\overline{F}_5^{\text{тр}}) = -\, F_5^{\text{тр}} s_5 = -f P_5 s_1 \,;$$
$$A(M) = -\, M\varphi_3 \,;$$
$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}\,(\lambda_0^2 \, - \, \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$ $\overline{F}^{\text{тр}}{}_1$ и $\overline{S}_2$, - мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ и $\overline{P}_4$, - неподвижны; а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи $\lambda_o = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E - перемещение точки *E* (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = \upsilon_A / r_3 = \upsilon_{C1} / r_3$ (равенство $\upsilon_{C1} = \upsilon_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1 / r_3$. Далее, из рис. 6,*б* видно, что $\upsilon_D = \upsilon_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока *2* (он как бы «катится» по участку нити K_2L), то $\upsilon_E = 0{,}5\upsilon_D = 0{,}5\,\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\,\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 R_3 / r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим:

$$\sum A_k^e \; = 20(3s_1 + s_1^2) \; + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - M\,\frac{s_1}{r_3} \, - \frac{c}{8}\,\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2\right) \omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) +$$
$$+ P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - \frac{M}{r_3} s_1 - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2 \qquad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3. Ответ: $\omega_3 = 8{,}1\ \text{с}^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В.Добронравов, Н.Н.Никитин.-М.: Высш. школа, 1983.-575с.

2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М.Тарг.-М.: Высш. школа, 1995.-416с.

3. Смирнов,В.И. Курс теоретической механики / В.И.Смирнов, Г.И.Чистобородов , М.С.Губерман - Иваново: ИГТА, 2004.-536с.

4. Бать,М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2/ М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе , А.С.Кельзон -М.: Наука, 1990, 1991.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов немеханических специальностей
2 курса заочного факультета

Составитель Николай Федорович Калабин

Научный редактор С.М.Иванов
Редактор И.Н. Худякова
Корректор К.А.Торопова

Подписано в печать 12.03.2009.
Формат 1/8 60х84. Бумага писчая. Плоская печать.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 1,78. Тираж 120 экз. Заказ №

Редакционно - издательский отдел
Ивановской государственной текстильной академии
Копировально – множительное бюро
153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса, 21

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов немеханических специальностей
2 курса заочного факультета

Иваново 2009