МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Ивановский государственный политехнический университет "

Кафедра "Технологические машины и оборудование"

Простейшие движения твердого тела

Методические указания для студентов всех направлений

подготовки дневной и заочной форм обучения

Иваново 2016

Методические указания предназначены в помощь студентам дневной и заочной форм обучения при выполнении ими контрольных заданий и домашних работ, относящихся к изучению простейших движений твердых тел. Цель методических указаний – научить студента самостоятельно решать задачи на темы ″Поступательное движение твердого тела″ и ″Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси″. При составлении указаний автор разработал типовые задачи с подробным их разбором.

Составитель канд. техн. наук, доц. Н.Ф. Калабин

Рецензент канд. техн. наук, доц. Т.В.Шмелева

Редактор Н.Е.Бочкарева

Подписано в печать 19.01.2016.

Формат 1/16 60x84. Плоская печать.

Усл. печ. л. 1,39. Уч.−изд. л. 1,3. Тираж 50 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный политехнический университет»

Издательский центр ДИВТ

153000, г. Иваново, Шереметевский просп., 21

Всего в механике различают пять видов движений: поступательное, вращательное, плоское (плоскопараллельное), сферическое и общий случай движения. К простейшим относятся поступательное и вращательное движения твердого тела.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется движение твердого тела, при котором всякая прямая, взятая в теле, остается параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение может быть прямолинейным, например, кабина лифта (рис. 1). Такое движение хорошо известно студентам. Но поступательное движение может и не быть прямолинейным, например, движение педалей велосипеда, кабинок "чертового колеса". В этом случае точки тела описывают сложные траектории. Например, траектории точек представленного на рис. 2 спарника AB колес паровоза по отношению к корпусу паровоза представляют собой окружности, а по отношению к земле более сложные кривые – циклоиды, хотя сам спарник при вращении кривошипов OA = O_1B совершает поступательное движение.

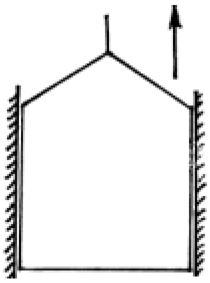


Рис. 1

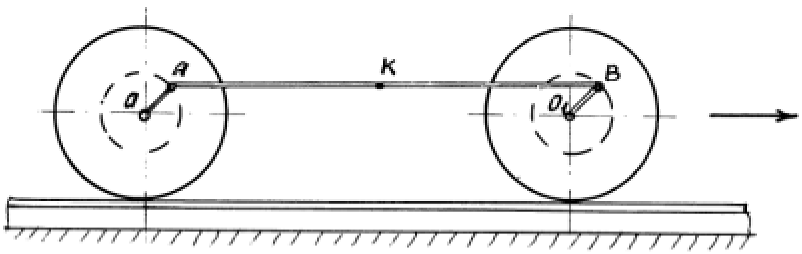


Рис. 2

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные и параллельные (конгруэнтные) траектории и имеют геометрически (векторно) равные скорости и ускорения. В случае спарника паровоза:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}_K,$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}_K.$$

Из вышеописанного следует: изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения какой−либо одной его точки. Это означает, что рассмотренные в кинематике точки законы (уравнения) справедливы для поступательно движущегося тела.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение твердого тела)

Вращательным называется движение твердого тела, при котором все его точки описывают траектории окружности с центрами на одной неподвижной прямой (ось вращения), перпендикулярной плоскостям вращения точек (рис. 3).

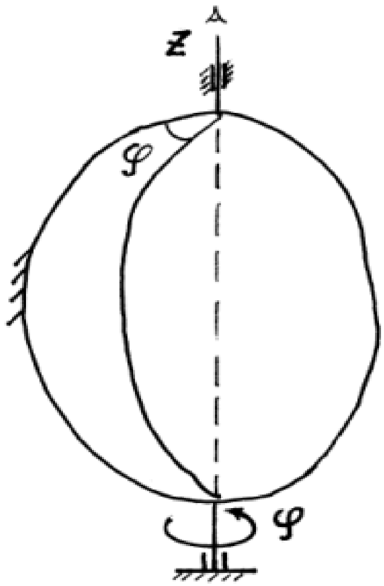


Рис. 3

Уравнение (закон) вращательного движения:

$$\varphi = f(t),$$

где φ – угол поворота тела [радиан].

В технических расчетах и ряде практических задач этот угол выражают через число оборотов N. Если один оборот (360°) соответствует 2π радиан, то

$$\varphi = 2\pi N.$$

При решении задач на рисунках показывают дуговую стрелку φ – положительный угол отсчета (таковым принято считать угол, откладываемый с положительного направления оси z против часовой стрелки).

Угловая скорость и угловое ускорение

Угловая скорость характеризует изменение угла поворота тела. В данный момент времени выражается первой производной от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \ [\text{рад/с},\ 1/\text{с},\ \text{с}^{-1}].$$

На рис. 4,5 дуговая стрелка ω указывает на направление вращения тела.

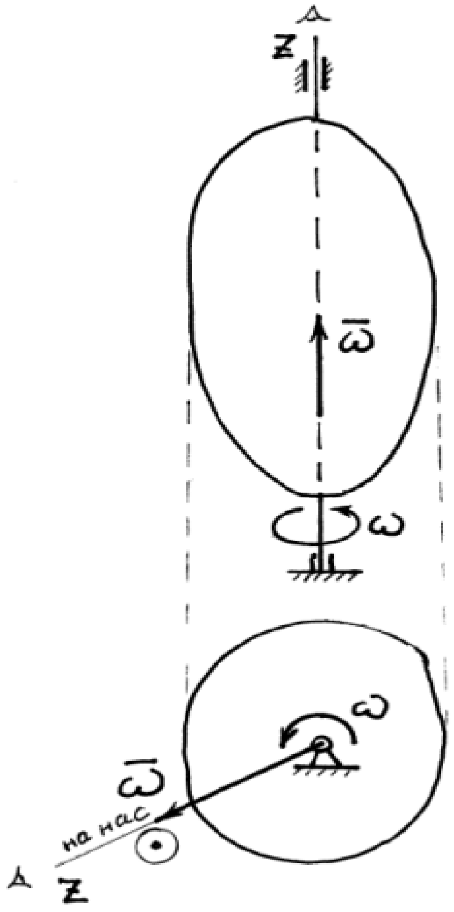


Рис. 4

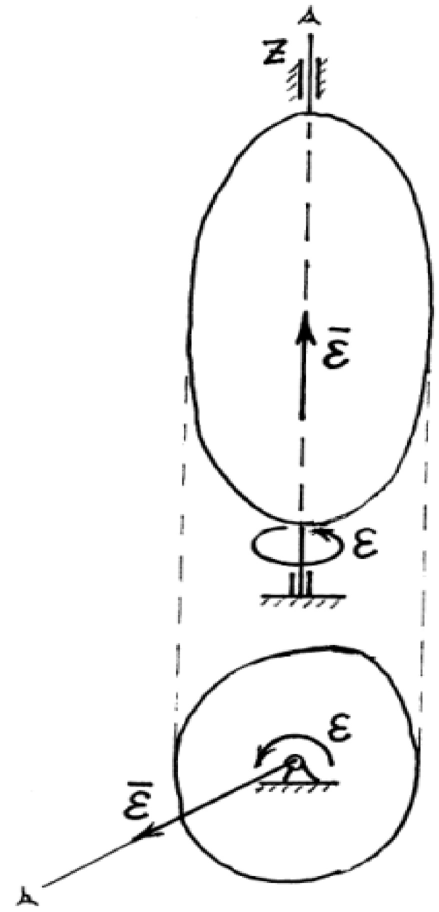


Рис. 5

В дальнейшем нам потребуется знать направление вектора $\bar{\omega}$ (не путать с дуговой стрелкой ω) (рис. 4). Вектор $\bar{\omega}$ скользящий, то есть прикладывается к любой точке оси вращения z и направляется в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки.

В технике зачастую вместо угловой скорости ω используют число оборотов в минуту n [об/мин].

Зависимость между ними выражается формулой

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости тела в данный момент времени. Выражается первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}\ [\text{рад/с}^2,\ {}^1/_{\text{с}^2}\ ,\text{с}^{-2}].$$

Вектор $\bar{\varepsilon}$ направляется аналогично вектору $\bar{\omega}$, но смотреть надо на дуговую стрелку ε (рис. 5).

ω и ε характеризуют вид вращения тела:

– равномерное ($\omega = const,\ \varepsilon = 0$);

– равноускоренное (ω и ε имеют одинаковые знаки);

– равнозамедленное (ω и ε имеют противоположные знаки).

На рис. 6 представлены вращающиеся цилиндры с различными видами вращений: *а* – равномерное, *б* – равноускоренное, *в* – равнозамедленное.

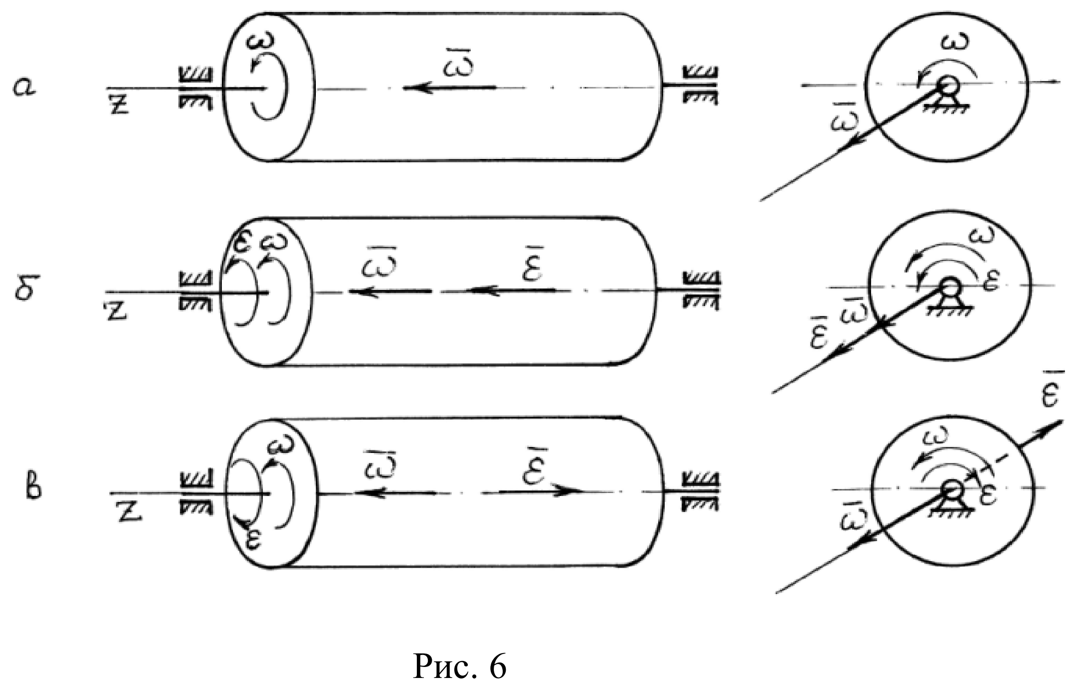


Рис. 6

Скорость и ускорение точек вращающегося твердого тела

В кинематике точки координату S определяли по различным формулам. При вращательном движении длина дуги

$$S = \omega R,$$

где R – радиус вращения точек тела.

Скорости точек

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\varphi R)}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega,\ R = const.$$

Итак, скорости точек вращающегося тела определяем по формуле

$$V = \omega R.$$

Направление вектора $\bar{V}$. Так как вектор скорости при движении по кривой направлен по касательной к траектории в сторону движения точки, то при вращательном движении вектор $\bar{V}$ направлен перпендикулярно радиусу R в сторону вращения тела (по дуговой стрелке ω). Например, (рис. 7, *а*) при вращении тела в пространстве вектор скорости $\bar{V}$ направлен параллельно оси x (на нас), а при вращении в плоскости листа – вниз.

При движении точки по кривой и, в частности, по окружности, ускорение складывается из нормального и касательного (нормальной и касательной составляющих ускорения):

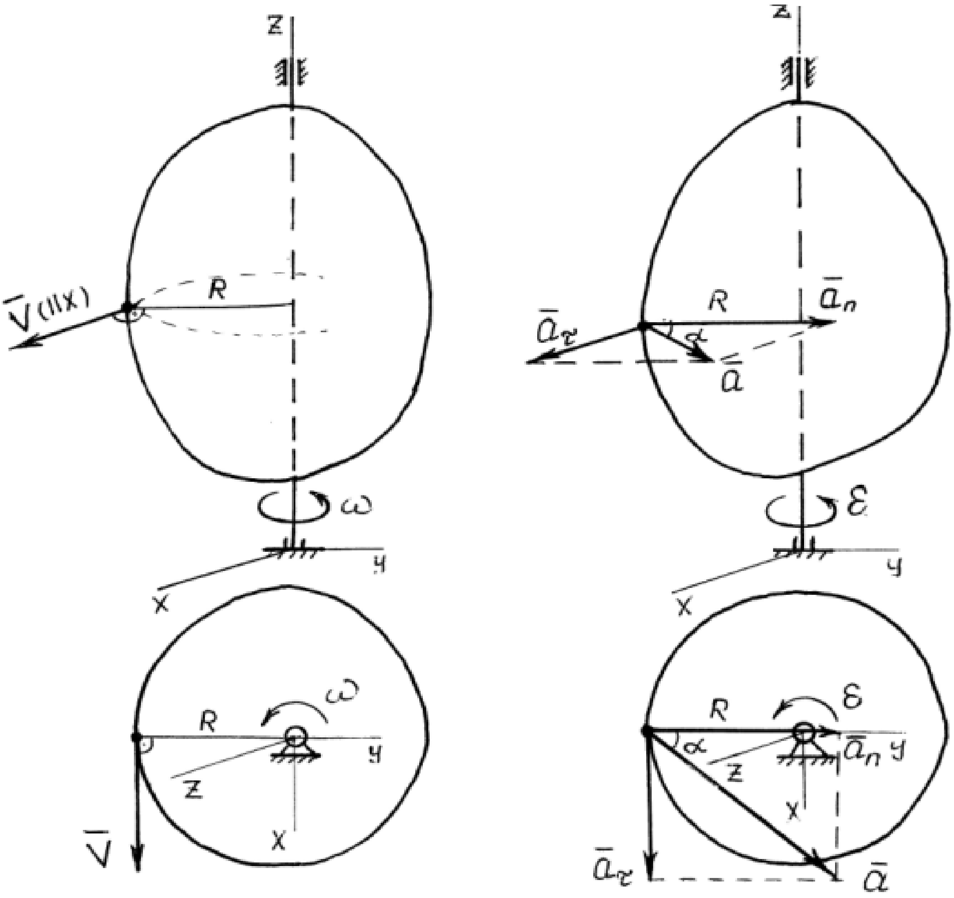
$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau.$$

Нормальное ускорение. При вращении тела радиусы окружностей R, описываемые точками тела, равны радиусам кривизны ρ. Тогда

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R.$$

Касательное (тангенциальное) ускорение

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon,\ \text{т.е.}\ a_\tau = \varepsilon R.$$



а *б*

Рис. 7

Направления векторов

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ направлен по радиусу к оси (центру) вращения.

Вектор касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ направлен аналогично вектору $\bar{V}$, то есть перпендикулярно радиусу R, но в сторону дуговой стрелки ε.

Вектор полного ускорения $\bar{a}$ изображаем в виде диагонали в прямоугольнике, построенном на векторах $\bar{a}_n$ и $\bar{a}_\tau$.

Так как $\bar{a}_n \perp \bar{a}_\tau$, то модуль полного ускорения (теорема Пифагора)

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Направление вектора $\bar{a}$ можно легко определить из полученных на векторах $\bar{a}_n$ и $\bar{a}_\tau$ прямоугольных треугольниках (рис. 7, *б*) как

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Формулы равномерного и равнопеременного вращений

Если угловая скорость тела во все время его вращения остается постоянной ($\omega = const$), то такое вращение называется равномерным.

Уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t;$$

в случае начала отсчета от нулевого положения угол поворота $\varphi = 0$, тогда

$$\varphi = \omega t.$$

Если угловое ускорение тела во все время его вращения остается постоянным ($\varepsilon = const$), то вращение называется равнопеременным, то есть равноускоренным или равнозамедленным. Уравнение равнопеременного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

если тело начинает вращение без начальной угловой скорости ($\omega_0 = 0$) из начала отсчёта вращения тела ($\varphi_0 = 0$), то

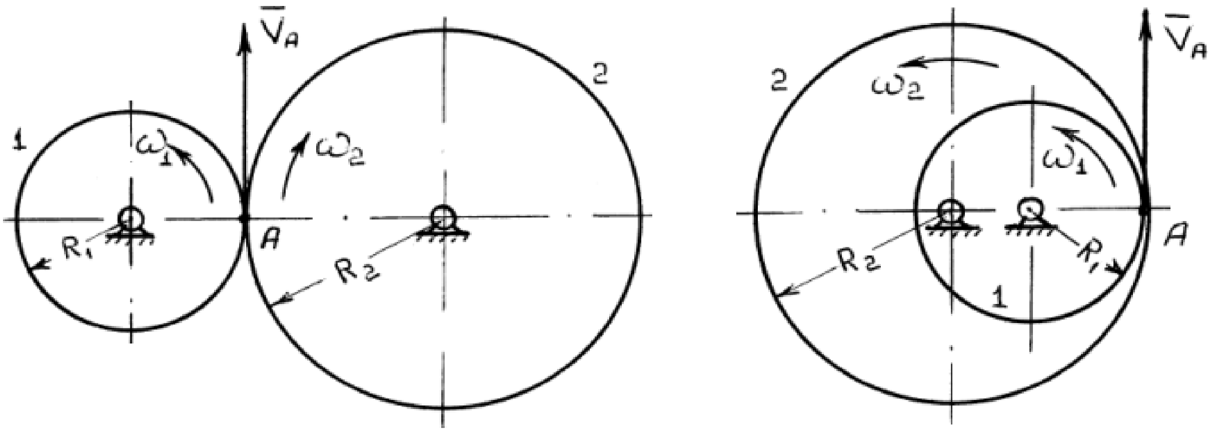
$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$

при $\omega_0 = 0$ $\omega = \varepsilon t.$

Система вращающихся тел. Передаточные механизмы

При решении практических задач, где встречается преобразование движений, в частности, преобразование вращательного движения одного тела во вращательное движение другого тела, запишем зависимости, имеющие место при рассмотрении движений с зубчатыми, фрикционными и ременными передачами.



а *б*

Рис. 8

Пусть в зацеплении находятся два зубчатых колеса (рис. 8) с радиусами окружностей R_1 и R_2. Первое колесо – ведущее, второе – ведомое. Скорость точки зацепления зубцов одинакова для обоих колес по величине и направлению:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{1A} = \bar{V}_{2A}.$$

Из этого равенства получим соотношение между угловыми скоростями колес и их радиусами:

$$V_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

то есть отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса равно обратному отношению их радиусов. Из рис. 8, *а* понятно, что при внешнем зацеплении ведомое колесо вращается в сторону, противоположную вращению ведущего. При внутреннем зацеплении (рис. 8, *б*) колеса вращаются в одном направлении.

Отношение угловых скоростей можно выразить через число зубцов колес z_1, z_2 и число оборотов n_1 и n_2, а именно:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \text{ и } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \cdot$$

Отношение угловой скорости ведомого колеса к угловой скорости ведущего называется передаточным отношением $i_{1,2}$.

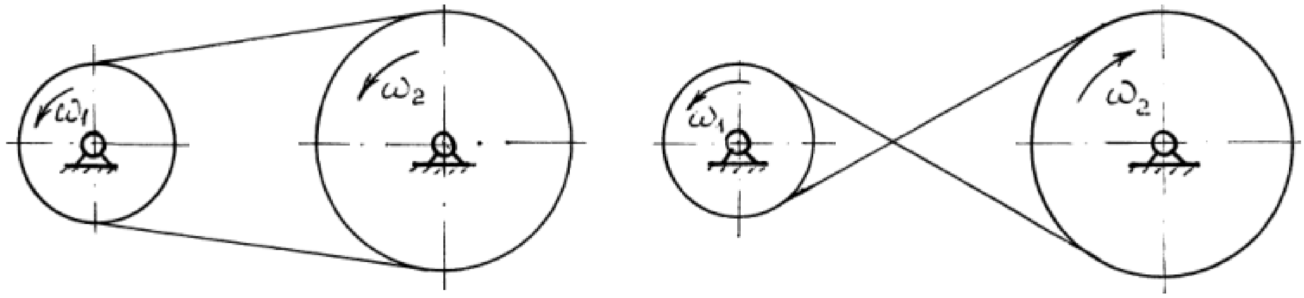
На основании полученных зависимостей имеем:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2};$$

если в зацеплении находится несколько зубчатых колес, соединенных последовательно или параллельно, то общее передаточное число равно произведению передаточных чисел всех зубчатых колес:

$$i_{1,n} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot i_{3,4} \cdot \ldots \cdot i_{n-1,n}.$$

В случае ременной передачи (рис. 9) передаточное число равно отношению угловой скорости ведущего шкива к угловой скорости ведомого.



а *б*

Рис. 9

Это отношение прямо пропорционально отношению чисел оборотов и обратно пропорционально отношению радиусов колес:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2} \cdot$$

Если ремни передачи не скрещиваются (рис. 9, *а*), то угловые скорости ведомого и ведущего шкива имеют одинаковые направления. При скрещивающихся ремнях (рис. 9, *б*) угловые скорости имеют противоположные направления.

Рассмотрим примеры решения практических задач на тему "Простейшие движения твердого тела".

Задача 1

Груз *А*, перемещаясь влево по закону $S = t^2 + t$ *м,* приводит во вращение барабан *В* (рис.10).

Определить в момент времени $t = 1c$ скорость и ускорение точек обода барабана, если его радиус $R = 0,5$ *м*, а также угол, образованный вектором полного ускорения с направлением на радиус.

Дано:

$S = t^2 + t$ *м*

$t = 1$ *с*

$R = 0,5$ *м*

Определить: *м, м,* α.

Решение

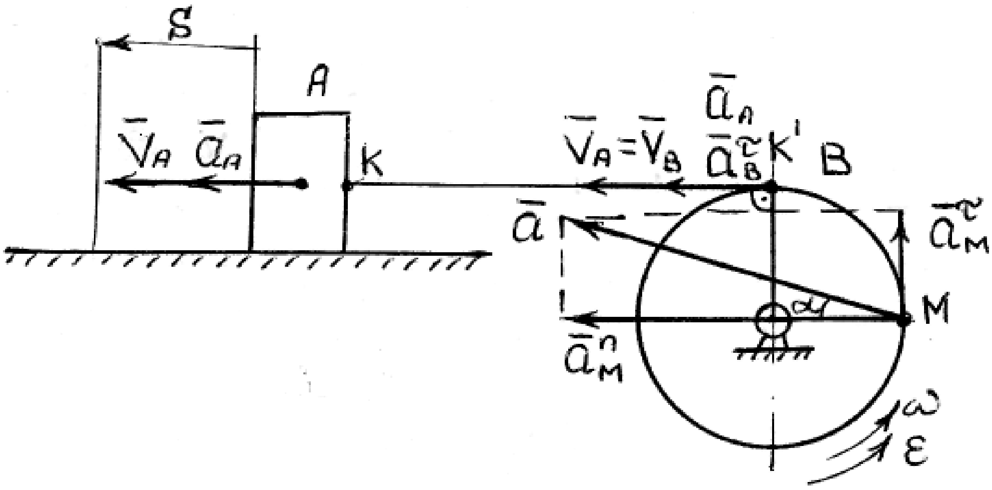


Рис. 10

В механической системе груз *А* совершает поступательное прямолинейное движение, а барабан *В* – вращательное. Принимая груз за геометрическую точку и зная закон его движения *S=f(t),* определим скорость и ускорение груза:

$$V_A = \frac{dS}{dt} = 2t + 1,$$

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = 2 \text{ м/с}^2;$$

в заданный момент времени при $t = 1$ *с*

$$V_A = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ м/с}.$$

Знаки «+» показывают, что вектора $\bar{V}_A$ и $\bar{a}_A$ направлены в сторону возрастания координаты S.

Поскольку знаки скорости и ускорения одинаковы, то груз совершает равноускоренное движение; вектора прикладывают к любой точке тела, совершающего поступательное движение (обычно к центру тяжести). Если, как в нашем случае, тела системы соединены нитями, то мы как бы перемещаемся по нитям от одного тела к другому, рассматривая при этом общие точки для тел и нитей. Если же тела системы тел непосредственно находятся в контакте (зацеплении), то рассматриваем точки контакта тел.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения, то общие точки для груза и нити (K), барабана и нити (K') имеют одинаковые скорости, равные $\bar{V}_A$; ускорение груза $\bar{a}_A$ будет равно касательному ускорению $\bar{a}_B^\tau$ точек обода барабана B, совершающего вращательное движение. Зная скорость и касательное ускорение точки K' барабана B, мы сможем найти его угловую скорость ω и угловое ускорение ε:

$$V_B = \omega R \rightarrow \omega = \frac{V_B}{R} = \frac{V_A}{R} = \frac{3}{0,5} = 6 \ c^{-1},$$

$$a_B^\tau = \varepsilon R \rightarrow \varepsilon = \frac{a_B^\tau}{R} = \frac{a_A}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \ c^{-2}.$$

ω и ε имеют одинаковые знаки (+), следовательно, барабан B, как и груз A, совершает равноускоренное движение (вращение). Можно исходить и из других соображений: если одно из тел системы совершает, например, равноускоренное движение, то и другие тела системы совершают равноускоренное движение.

Покажем на рис.10 дуговые стрелки ω и ε исходя из следующих соображений: вектора $\bar{V}_B$ и $\bar{a}_B^\tau$ направлены перпендикулярно радиусу в стороны дуговых стрелок ω и ε, то есть обе стрелки направлены против часовой стрелки.

Скорости и касательные ускорения всех точек обода барабана, в том числе и интересующей нас точки *M*, равны:

$$V_M = V_B = V_A = 3 \text{ м/с},$$

$$\bar{a}_M^\tau = \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A = 2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точек вращающегося тела складывается из касательного и нормального:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^\tau + \bar{a}_M^n,$$

где $a_M^n = \omega^2 R = 6^2 \cdot 1 = 36 \text{ м/с}^2.$

Направления векторов

Вектор $\bar{a}_M^\tau$ направлен перпендикулярно радиусу вращения точки *M* (*R = MO)* в сторону дуговой стрелки ε, то есть – вверх.

Вектор $\bar{a}_M^n$ направлен по радиусу *MO* к центру вращения *O*.

Вектор $\bar{a}$ покажем по правилу векторного сложения.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{2^2 + 36^2} = 36{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Определим угол α, образованный вектором $\bar{a}$ с направлением на радиус MO (из прямоугольного треугольника):

$$tg\alpha = \frac{a_M^\tau}{a_M^n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{4}{36} = 0{,}111 \rightarrow \alpha = 6°20'.$$

Ответ: $V_M = 3$ *м/с,* $a_M = 36{,}1$ *м/с²,* $\alpha = 6°20'$.

Задача 2

Определить скорость и ускорение точки *M* звена *AB*, изображенного на рис.11 шарнирного параллелограмма $OABO_1$, если кривошип *OA* вращается по закону $\varphi = f(t)$.

Дано:

$OA = O_1B = 0,4$ *м/с*

$\varphi = \frac{\pi}{2} t$ *рад.*

Определить: V_M, a_M.

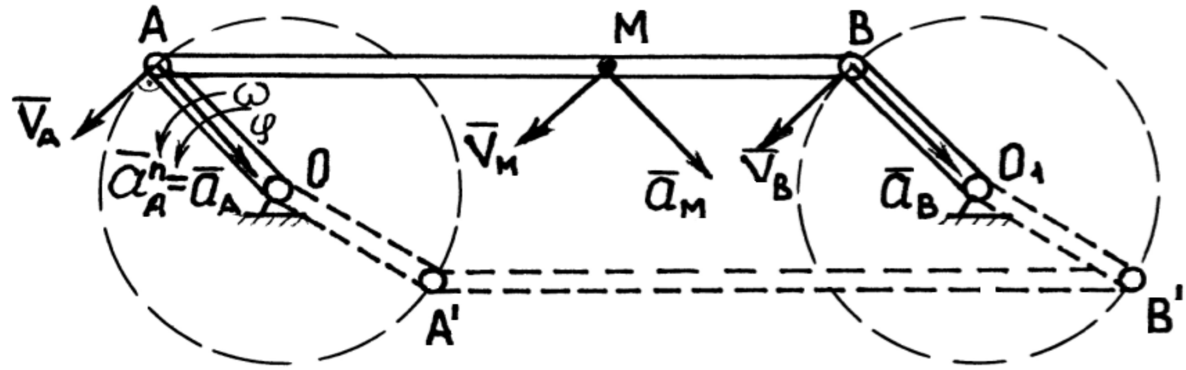


Рис. 11

Решение

На рис. 11 пунктиром показаны положения механизма, дающие наглядные представления о его работе. Видим, что точки A и B описывают одного радиуса траектории-окружности с центрами в точках O и O_1, а прямая AB остается параллельной исходному положению. Это значит, что входящие в механизм звенья OA и O_1B совершают вращательное движение, а звено AB – поступательное (оно не является прямолинейным).

Из уравнения вращения звеньев OA и O_1B найдем их угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{2}\ c^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(2\pi)}{dt} = 0\ c^{-2}.$$

Следовательно, звенья совершают равномерное вращение (ω=*const*), а знак «+» указывает, что дуговые стрелки ω и φ совпадают.

Скорость точки A

$$V_A = \omega \cdot OA = \frac{\pi}{2} \cdot 0,4 = 0,2\pi\ м/с.$$

Вектор $\bar{V}_A$ направлен перпендикулярно радиусу OA в сторону вращения (в сторону дуговой стрелки ω, указывающей на направление вращения).

Однако точка A принадлежит не только звену OA, но и звену AB, совершающему поступательное движение. При таком движении скорости всех точек геометрически равны, значит

$$V_M = V_A = V_B = 0{,}2\pi \text{ м/с}.$$

Перенесем вектор $\bar{V}_A$ в точки M и B.

Ускорение точки A, принадлежащей звену OA, определим по формуле

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau,$$

где
$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}1\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 0 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен по радиусу OA к центру вращения O.

Из векторного равенства $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$ следует, что полное ускорение точки A равно её нормальному ускорению: $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$, то есть

$$a_A = a_A^n = 0{,}1\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку точка A принадлежит также звену AB, совершающему поступательное движение, то ускорения всех точек этого звена равны $\bar{a}_A$:

$$a_M = a_A = a_B = 0{,}1\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $V_M = \pi$ *м/с*, $a_M = 0{,}1\pi^2$ *м/с*^{2}.

Задача 3

Механизм состоит из рейки, приводящей в движение механизм ступенчатых барабанов, связанных ременной передачей (или находящейся в зацеплении), и груза, привязанного к концу нити, намотанной на малую ступень одного из барабанов (рис. 12, *а*). Рейка движется по закону $S = f(t)$.

Определить в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение точки A обода барабана, а также скорость и ускорение груза.

Дано:

S =0,3sin(− *м*

м

= 0,1 *м*

0,4 *м*

= 0,3 *м*

= 2 *с*

Определить:

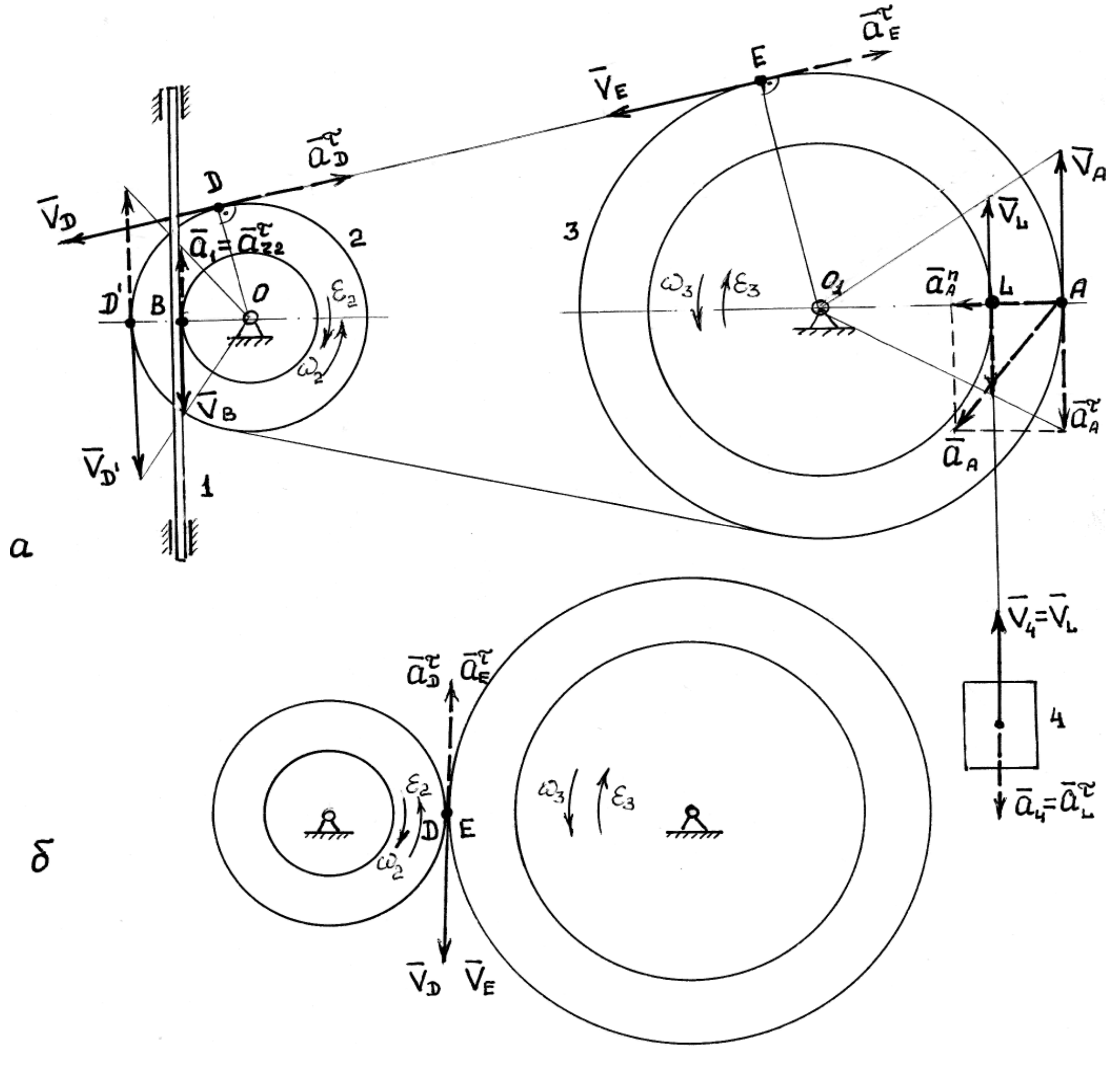


Рис. 12

Решение

Входящие в механическую систему рейка 1 и груз 4 совершают поступательные прямолинейные движения, а ступенчатые барабаны 2 и 3 – вращательные.

Зная закон движения рейки, определим её скорость и ускорение:

$$V_1 = \frac{dS}{dt} = \frac{0{,}3\pi}{6} cos(\frac{\pi}{6} t),$$

$$a_1 = \frac{dV_1}{dt} = -\frac{0{,}3\pi^2}{36} sin(\frac{\pi}{6} t).$$

В заданный момент времени при $t = 2$ c получим:

$$V_1 = \frac{0{,}3\pi}{6} cos(\frac{\pi}{6} \cdot 2) = \frac{0{,}3\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}14 \text{ м/с},$$

$$a_1 = -\frac{0{,}3\pi^2}{36} sin(\frac{\pi}{6} \cdot 2) = -\frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{1}{2} = -0{,}04 \text{ м/с}^2.$$

Выбрав на рисунке положительное направление отсчета движения рейки S (неважно в какую сторону – вверх или вниз), покажем вектора $\bar{V}_1$ и $\bar{a}_1$. Учитывая полученные знаки, а они противоположны, вектора скорости и ускорения направлены в противоположные стороны. Рейка совершает равнозамедленное движение (и все остальные тела системы). Поскольку рейка совершает поступательное движение, то скорости и ускорения всех точек одинаковы. К какой же точке приложить вектора? Чтобы передать движение от одного тела (рейки 1) к другому (барабану 2), приложим их к точке зацепления *B*.

Теперь перейдем к телу 2, считая, что точка *B* принадлежит уже барабану. В этом случае вектор $\bar{V}_1$ является также скоростью $\bar{V}_B$ точек малого обода барабана, а ускорение $\bar{a}_1$ является касательным ускорением $\bar{a}^{\tau}_{r_2}$ точек малого обода (индекс r_2 означает окружность этого радиуса). Ориентируясь на направление векторов $\bar{V}_B$ и $\bar{a}^{\tau}_{r_2}$, покажем дуговые стрелки ω_2 и ε_2 на рис. 12.

Определим модули ω_2 и ε_2:

$$V_1 = \omega_2 r_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{0{,}14}{0{,}1} = 1{,}4 \ c^{-1},$$

$$|a^{\tau}_{r_2}|^{\times} = |a_1| = \varepsilon_2 r_2 \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{|a^{\tau}_{r_2}|}{r_2} = \frac{0{,}04}{0{,}1} = 0{,}4 \ c^{-2}.$$

$a^{\tau}_{r_2}$ и, следовательно, ε_2 лучше взять по модулю, чтобы в дальнейших расчетах не оперировать знаком "–", а направления векторов скоростей и касательных ускорений определять по дуговым стрелкам ω и ε.

Перейдя к телу 3, надо рассмотреть общие точки *D* и *E* для барабанов и ремня. Эти точки – точки схода и набегания ремня на барабаны; перемещения, скорости и касательные ускорения этих точек равны.

Зависимости между скоростями и касательными ускорениями:

$$V_D = \omega_2 R_2, \quad a^{\tau}_D = \varepsilon_2 R_2;$$

$$V_E = \omega_3 R_3, \quad a^{\tau}_E = \varepsilon_3 R_3.$$

Отсюда устанавливаем зависимости между угловыми скоростями и ускорениями барабанов 2 и 3. Так как $V_D = V_E$, а $a^{\tau}_D = a^{\tau}_E$, то

$$\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3 \rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3} = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}4} = 0{,}7\ c^{-1},$$

$$\varepsilon_2 R_2 = \varepsilon_3 R_3 \rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 R_2}{R_3} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}4} = 0{,}2\ c^{-2}.$$

Зная ω_3 и ε_3, мы можем рассчитать скорости и ускорения точек большого и малого ободов барабана 3. Так, для точки *A*

$$\bar{a}_A = \bar{a}^n_A + \bar{a}^{\tau}_A,$$

где нормальное и касательное ускорения точек обода большого барабана 3

$$a^n_A = \omega_3^2 R_3 = 0{,}7^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}2\ м/с^2,$$

$$a^{\tau}_A = \varepsilon_3 R_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08\ м/с^2.$$

Покажем на рисунке вектора ускорений: вектор $\bar{a}^n_A$ направлен по радиусу к центру вращения колеса O_1, а вектор $\bar{a}^{\tau}_A$ направлен перпендикулярно радиусу O_1A вращения точки *A* в сторону дуговой стрелки ε_3. Вектор полного ускорения $\bar{a}_A$ является диагональю в прямоугольнике, построенном на векторах $\bar{a}^n_A$ и $\bar{a}^{\tau}_A$. Так как угол между нормальным и касательным ускорениями 90°, то модуль (теорема Пифагора):

$$a_A = \sqrt{(a^n_A)^2 + \left(a^{\tau}_A{}^2\right)} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}08^2} = 0{,}22\ м/с^2.$$

Скорость точки *A*

$=$ *м/с.*

Вектор направлен перпендикулярно радиусу O_1A в сторону дуговой стрелки (по модулю).

Определим скорость и ускорение груза 4. По нити от точки *L* малой ступени колеса 3 переместимся к грузу, имея при этом в виду, что скорость и касательное ускорение точки *L* и груза равны векторно (по модулю и направлению; всех остальных точек малого обода – равны по модулю):

м/с,

$= \quad = \quad = 0{,}06$ *м/с*^{2}.

Переносим вектора скорости и касательного ускорения из точки *L* к грузу 4.

В случае зацепления (рис. 12, б) рассматриваем общую точку(*D,E*) – все расчеты точно такие же, как и для ременной передачи.

Ответ: *м/с,* *м/с*^{2}*,* *м/с,* *м/с*^{2}.

Задача 4

Маховое колесо радиуса 0,5 метра, вращающееся со скоростью 900 об/мин, через 10 секунд после начала торможения останавливается (рис. 13).

Определить скорость и ускорение точек обода колеса в момент начала торможения, а также число оборотов до остановки.

Дано:

$n_0 = 900$ *об/мин*

$t = 10$ *с*

$= 0{,}5$ *м*

Определить: $_0$, $_0$, *N.*

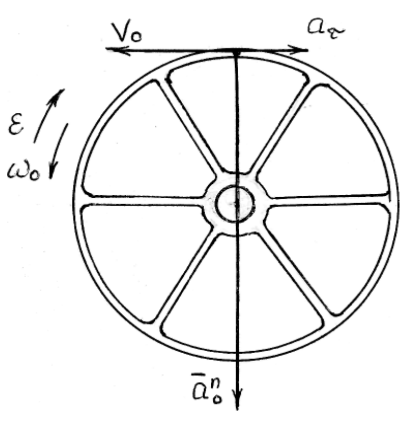


Рис. 13

Решение

Маховое колесо совершает равнозамедленное вращение. Исходными формулами являются:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Применим формулу, связывающую угловую скорость и частоту вращения (заданная по условию задачи скорость по размерности об/мин является частотой вращения n_0):

$$\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi 900}{30} = 30\pi\ c^{-1}.$$

По данным задачи формула расчета угловой скорости будет иметь вид:

$$0 = \omega_0 + \varepsilon \cdot 10 \rightarrow \varepsilon = -\frac{\omega_0}{10} = -\frac{30\pi}{10} = -3\pi\ c^{-2}.$$

Противоположные знаки при ω_0 и ε показывают, что вращение махового колеса равнозамедленное (ε = *const*).

Определим скорость точек обода колеса в начале торможения:

$$V_0 = \omega_0 R = 30\pi \cdot 0{,}5 = 15\pi\ м/с.$$

Вектор $\bar{V}_0$ направлен перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки ω_0; приложим его к произвольной точке обода.

Определим ускорение точек обода колеса. При вращательном движении

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_0^n + \bar{a}^\tau,$$

где $\bar{a}_0^n$ – нормальное ускорение в момент торможения;

$$a_0^n = \omega_0^2 R = (30\pi)^2 \cdot 0{,}5 = 450\pi^2\ м/с^2,$$

$$a^\tau = \varepsilon R = -3\pi \cdot 0{,}5 = -1{,}5\pi\ м/с^2.$$

Вектор $\bar{a}_0^n$ направлен по радиусу к центру окружности (колеса), а вектор $\bar{a}^\tau$ – перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки ε.

Так как $\bar{a}_0^n \perp \bar{a}^\tau$, то модуль (теорема Пифагора) полного ускорения

$$a_0 = \sqrt{(a_0^n)^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega_0^4 + \varepsilon^2} = 0{,}5\sqrt{(30\pi)^4 + \left(-3\pi\right)^2} =$$

$$= 0{,}5\pi\sqrt{30^4\pi^2 + 9} = 1413{,}7\pi \textit{ м/с}^2.$$

Определим число оборотов до остановки махового колеса, используя зависимости:

$$\varphi = 2\pi N,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

По условию задачи $\varphi_0 = 0$, тогда

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}}{2\pi} = \frac{30\pi\cdot 10 + \frac{-3\pi\cdot 10^2}{2}}{2\pi} = 75 \textit{ об.}$$

Ответ: $V_0 = 15\pi$ *м/с,* $a_0 = 4441{,}3$ *м/с*^{2}, $N = 75$ *об.*

Задача 5

При помощи лебедки (рис. 14) осуществляется подъем груза *A* вращением рукоятки *OB*.

Вследствие неисправности механизма груз начал опускаться по закону $S = 0{,}05t^2$ *м.* Радиус барабана на который намотан трос, несущий груз, $R = 0{,}1$ *м*. Число зубцов шестерен лебедки: $z_1 = 13$, $z_2 = 39$, $z_3 = 11$, $z_4 = 77$.

Определить скорость и ускорение точки *B* конца рукоятки длиной 0,4 *м* через 2 *с* после начала опускания груза.

Дано:

S=0,05t м

R=0,1 м

= 13

= 39

= 11

= 77

l = 0,4 м

____

Определить:

.

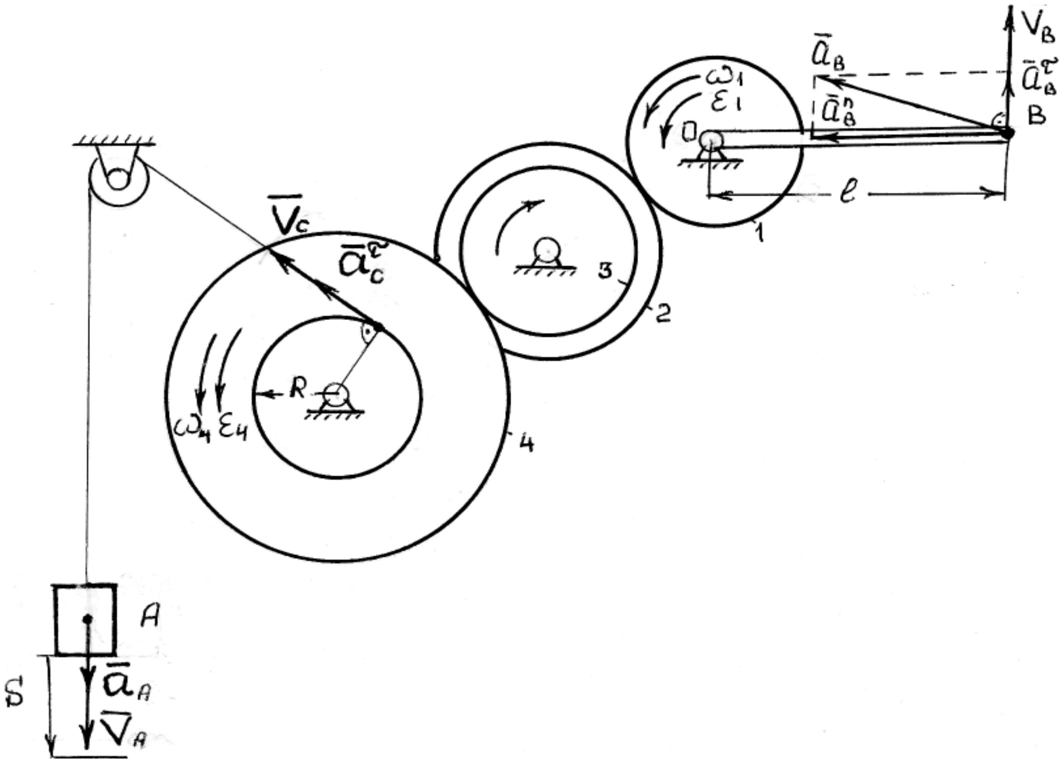


Рис. 14

Решение

Груз приводит в движение шестерню 4, от которой по цепочке шестерен вращение передается рукоятке, следовательно, ведущей является шестерня 4. Определим ее угловые скорость и ускорение.

По известному закону движения груза найдем его скорость и ускорение:

— при $t=2c$ = ,2 *м/с,*

— *м/с*^{2}.

Перемещаясь по тросу, перенесем вектора скорости и ускорения из точки *A* в точку схода троса с барабана *C*. В этом случае ускорение груза по модулю будет равно касательному ускорению точки *C*; скорость груза будет равна по модулю скорости точки *C*.

Линейная скорость и касательное ускорение точек вращающегося тела:

— — — c^{-1},

$$a_c^\tau = \varepsilon_4 R \rightarrow \varepsilon_4 = \frac{a_C^\tau}{R} = \frac{a_A}{R} = \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1\ c^{-2}.$$

V_A, a_A, следовательно, ω_4 и ε_4 имеют одинаковые знаки. Это указывает на ускоренное движение груза и ускоренное вращение шестерен и рукоятки механизма.

Определим угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 колеса 1. Для этого воспользуемся выражением для передаточного отношения механизма лебедки. По известной формуле общее передаточное отношение механизма равно $i_{4-1} = i_{4-3} \cdot i_{2-1} = \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{77}{11} \cdot \frac{39}{13} = 21;$

с другой стороны, $i_{4-1} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4}$,

следовательно,

$$\omega_1 = \omega_4 \cdot i_{4-1} = 2 \cdot 21 = 42\ c^{-1},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_4 \cdot i_{4-1} = 1 \cdot 21 = 21\ c^{-2}.$$

Линейная скорость V_B точки *B* конца рукоятки в этот же момент времени будет равна

$$V_B = \omega_1 l = 42 \cdot 0{,}4 = 16{,}8\ м/с.$$

Вектор скорости $\bar{V}_B$ точки *B* перпендикулярен рукоятке *OB* и направлен в сторону вращения рукоятки ω_1.

Модуль ускорения a_B конца рукоятки:

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2}\ ,\ \text{где } a_B^n = \omega_1^2 l,\ a_B^\tau = \varepsilon_1 l;$$

$$a_B^n = 42^2 \cdot 0{,}4 = 705{,}6\ м/с^2;\ a_B^\tau = 21 \cdot 0{,}4 = 8{,}4\ м/с^2.$$

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_B^n$ точки *B* направлен по рукоятке *OB* к центру её вращения *O*.

Вектор касательного ускорения $\bar{a}_B^\tau$ точки *B* направлен перпендикулярно рукоятке *OB* в сторону углового ускорения ε_1.

Модуль $a_B = \sqrt{705{,}6^2 + 8{,}4^2} = 705{,}61\ м/с^2$.

Ответ: $V_B = 16{,}8\ м/с$, $a_B = 705{,}61\ м/с^2$.